Université d'Angers **2008-9**
Licence de Mathématiques-L3 **U3-Intégration**

Contrôle Continue du 14/11/2008.

EXERCICE 1 ($9 = 1 + 0,5 + 2,5 + 2,5 + 1,5 + 1$ **points).** Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit β la σ-algèbre des boréliens sur $\mathbb{R}$.

(1) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que g est mesurable (par rapport à la σ-algèbre β).

(2) Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f se prolonge en une application h définie sur $\mathbb{R}$ qui est continue en tout point x différent de a et de b.

(3) Soit h une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en tout point x de $\mathbb{R}$, sauf peut-etre en a et en b. On suppose de plus que h est continue à droite en a et continue à gauche en b. Montrer que h est mesurable (par rapport à la σ-algèbre β). Indication : Construire une suite d'applications continues g_n qui converge vers h.

(4) Montrer $[a, b] \cap \beta := \{[a, b] \cap B \text{ tel que } B \in \beta\}$ est une σ-algèbre sur $[a, b]$.

(5) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application mesurable (par rapport à la σ-algèbre β) . Montrer que la restriction $h_{|[a,b]} : [a; b] \to \mathbb{R}$ est une application mesurable (par rapport à la σ-algèbre $[a, b] \cap \beta$)

(6) Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est mesurable sur $[a, b]$ par rapport à la σ-algèbre $[a, b] \cap \beta$.

QUESTION 2 (6 **points).** Soit X un ensemble. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ une σ-algèbre sur X. Soit μ une mesure positive sur $(X, \mathcal{A})$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$:

$$A_0 \subset A_1 \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$$

Montrer que la suite $\mu(A_n)$ admet pour limite $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$. On justifiera par des doubles inclusions, toutes les égalités d'ensembles utilisées dans cette démonstration du cours.

Indication : Montrer que la suite $\mu(A_n)$ est la suite des sommes partielles d'ordre n d'une série à préciser.

EXERCICE 3 ($5 = 2 + 3$ **points).**

i) Enoncer le théorème de continuité sous le signe $\int$.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et bornée sur $\mathbb{R}$ *i.e.* il existe $M \in \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$.

Soit g une fonction intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue μ) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, *i.e.* $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mu, \mathbb{R})$.

On définit la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par la formule suivante :

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - t)g(t)\, d\mu(t).$$

ii) Démontrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$ en appliquant soigneusement le théorème de continuité sous le signe $\int$.

Remarque sur l'exercice 1 : La même démonstration marche en remplaçant $[a, b]$ par $]a, b[$. Ici, dans le cas de $[a, b]$, à la question 2), on peut prolonger f par une application h continue sur $\mathbb{R}$. La question (3) devient donc inutile pour démontrer (6).