Université d'Angers | **2007-8**
Licence de Mathématiques-L3 | **U2-Intégration**

Contrôle Continue du 25/10/2007.

EXERCICE 1 (4 points) : Image directe et réciproque d'un complémentaire. Soient X et Y deux ensembles, et $f\ : X \longrightarrow Y$ une application. Soit A une partie de X. Soit B une partie de Y.

(1) L'assertion $f(A^c) = (f(A))^c$ est-elle vraie en général ? Justifier votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple.
(2) L'assertion $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ est-elle vraie en général ? Justifier votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

EXERCICE 2 (9 points) : Soit X un ensemble. Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ un ensemble de parties de X. Par définition, la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{E}$ est l'intersection de toutes les σ-algèbres contenant $\mathcal{E}$. C'est donc la plus petite σ-algèbre sur X contenant $\mathcal{E}$. Soit $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle. Par définition, la σ-algèbre des boréliens, que l'on notera β, est la σ-algèbre engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$.

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que f est mesurable pour la σ-algèbre β des boréliens sur $\mathbb{R}$.
(2) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, montrer que
$$]a, +\infty[= \cup_{n\in\mathbb{N}^*}[a + 1/n, +\infty[.$$
(3) Soit $\mathcal{A}$ la σ-algèbre engendré par les demi-droites $]-\infty, b[$ où $b \in \mathbb{R}$. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{A}$. (On rappelle que tout ouvert O de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts de la forme $]a, b[$, c'est-à-dire O s'écrit sous la forme $O = \cup_{n\in\mathbb{N}}]a_n, b_n[$).
(4) En déduire que $\mathcal{A}$ est égale à la σ-algèbre des boréliens β.

EXERCICE 3 (5 points) : Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit μ un mesure positive sur $(X, \mathcal{A})$. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$:
$$E_0 \subset E_1 \cdots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$
On rappelle que la suite $\mu(E_n)$ admet pour limite $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}}E_n)$.

Soit $s : X \to \mathbb{R}$ une application simple à valeurs positives. Par définition, s ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs positives et est mesurable. Clairement s s'écrit sous la forme $\sum_{i=1}^m \alpha_i\chi_{A_i}$ où les α_i sont des réels positifs et les A_i des éléments de $\mathcal{A}$.

Pour tout $E \in \mathcal{A}$, on rappelle que χ_E désigne l'application caractéristique de la partie E et on pose
$$\varphi(E) := \int_E s\, d\mu := \int_X s\chi_E\, d\mu.$$
(1) Montrer que la suite $\varphi(E_n)$ admet pour limite $\varphi(\cup_{n\in\mathbb{N}}E_n)$.

Indication :
-Pour tout $E \in \mathcal{A}$, calculer $\varphi(E)$ en fonction des α_i et des A_i,
-ou appliquer le théorème de convergence monotone à la suite $f_n := s\chi_{E_n}$.

QUESTION 4 (2 points) : Enoncer le théorème de convergence monotone.