# Les espaces $L^p$ $p = 1, 2, +\infty$

## I Le presque partout

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable muni d'une mesure $\mu$.

def Une propriété $P$ sur $X$ est vrai presque partout ssi elle est vrai sur le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle

Proposition Soient $f$ et $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ deux applications mesurables à valeurs positives ou Soient $f$ et $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ deux applications $\in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$.

Si $f = g$ presque partout alors $\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$.

relation d'équivalence transitif à expliquer

Preuve

$f = g$ presque partout veut dire qu'il existe $N \in \mathcal{A}$ tq $\mu(N) = 0$
et $\forall x \in X \setminus N \quad f(x) = g(x)$

D'après l'exo Intégration sur une partie

Comme $\mu(N) = 0$ alors $\int_N f \, d\mu = 0 = \int_N g \, d\mu$

Comme $f|_{X \setminus N} = g|_{X \setminus N}$

donc $$\int_{X \setminus N} f \, d\mu = \int_{X \setminus N} g \, d\mu .$$

donc $$\underbrace{\int_N f \, d\mu + \int_{X \setminus N} f \, d\mu}_{\int_X f \, d\mu} = \underbrace{\int_N g \, d\mu + \int_{X \setminus N} g \, d\mu}_{\int_X g \, d\mu} .$$

$\square$

Proposition Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une application mesurable tq $f \geq 0$.

$$\int_X f \, d\mu = 0 \Longrightarrow f = 0 \text{ presque partout}$$

Preuve Rudin ou Cours ENS lyon voir p13

Soit $E_n = \{ x \in X \text{ tq } f(x) \geq \frac{1}{n} \} = f^{-1}([\frac{1}{n}, +\infty]) \in \mathcal{A}$

$\forall x \in E_n \quad f(x) \geq 1/n$ car $f$ est mesurable

donc
$$0 = \int_X f \, d\mu \geq \int_{E_n} f \, d\mu \geq \int_{E_n} \frac{1}{n} \, d\mu = \frac{1}{n} \mu(E_n)$$

donc $\mu(E_n) = 0 \quad \mu\left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) = 0$

$\{ x \in X \text{ tq } f(x) \neq 0 \} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

et est de mesure nulle donc $f = 0$ presque partout

Proposition Soit $f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ une application mesurable tq $f \geqslant 0$

$$\int_X f \, d\mu < +\infty \implies f < +\infty \text{ presque partout}$$

Preuve Soit $N = \{x \in X \text{ tq } f(x) = +\infty\} = f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in N \quad f(x) \geqslant n$ donc

$$\int_X f \, d\mu \geqslant \int_N f \, d\mu \geqslant \int_N n \, d\mu = n \, \mu(N)$$

donc $\quad \mu(N) \leqslant \frac{1}{n} \int_X f \, d\mu \xrightarrow[\text{qd } n \to +\infty]{} 0$

donc $\mu(N) = 0$ $\square$

## II La notion d'espace vectoriel quotient

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$

Soit $N$ un sous $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $E$

~~inégalité de~~

On définit sur $E$ la relation d'équivalence

$x \sim y$ ssi $x - y \in N$.

Soit $x \in E$. Notons par $\bar{x} = \{ y \in E \text{ tq } y \sim x \}$ la classe d'équivalence de $x$. Soit $E/_N$ l'ensemble quotient

Comme $E$ est un $\mathbb{C}$-ev, $E$ est en particulier un groupe abelien

Comme $N$ est un sous $\mathbb{C}$-ev de $E$, $N$ est un sous groupe abelien de $E$.

Donc l'ensemble quotient $E/_N$ coïncide avec le groupe quotient $E/_N$:

$E/_N$ est muni d'une structure de groupes abeliens

telle que la surjection canonique $q : E \longrightarrow E/_N$

$$x \longmapsto \bar{x}$$

est un morphisme de groupes abeliens

On vérifie facilement en fait que $E/_N$ est muni d'une structure de $\mathbb{C}$-ev tel que $q$ soit une application $\mathbb{C}$-linéaire $E \longrightarrow E/_N$.

Il suffit de définir $\lambda . \bar{x} = \overline{\lambda . x}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}, x \in E$.

# III L'espace vectoriel normé $L^1(X, \mu, \mathbb{C})$

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable

Soit $\mu$ une mesure sur $X$

$\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C}) :=$ ensemble des applications $f$ mesurables de $X$ dans $\mathbb{C}$ tq $\int_X |f| < +\infty$ est un $\mathbb{C}$-ev

Pour tout $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$

Posons $\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu \in \mathbb{R}^+$

on a bien $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \, \|f\|_1$ pour tout complexe $\lambda$

on a l'inégalité triangulaire

$$\|f+g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1$$

mais on n'a pas $\|f\|_1 = 0 \iff f = 0$

en effet d'après section presque partout

$$\|f\|_1 = 0 \iff f = 0 \text{ presque partout}$$

Pour avoir une norme, on va quotienter le $\mathbb{C}$-ev $\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$

On définit la relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$

$f \sim g$ ssi $f = g$ presque partout

def $L^1(X; \mu; \mathbb{C}) := \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C}) / \sim$

Théorème 1) $L^1(X, \mu, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

2) l'intégrale $\int$ définit une forme $\mathbb{C}$-linéaire sur $L^1(X, \mu, \mathbb{C})$

3) $\| \|_1$ définit une norme sur $L^1(X; \mu; \mathbb{C})$

Preuve 1) $f = g$ presque partout $\Leftrightarrow f - g = 0$ presque partout $\Leftrightarrow \|f-g\|_1 = 0$ $\Leftrightarrow f - g \in N$

~~N ensemble de~~ l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$ de $\| \|_1$ nulle

Montrons que $N$ est un s-e-v de $\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$

Soient $f, g \in N$ donc $\|f\|_1 = 0$ et $\|g\|_1 = 0$

d'après l'inégalité triangulaire $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 = 0+0$

donc $\|f+g\|_1 = 0$ donc $f+g \in N$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \, \|f\|_1 = |\lambda| \times 0 = 0$ donc $\lambda f \in N$.

Donc $L^1(X, \mu, \mathbb{C}) = \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C}) / N$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

2) Soit $\bar{f} \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$, On définit $\int_X \bar{f} \, d\mu := \overset{\text{def}}{=} \int_X f \, d\mu$. Cette définition a bien un

sens car si $\bar{f} = \bar{g}$ alors $f = g$ presque partout

et on a vu que $\int f = \int g$ dans ce cas.

3) Soit $\bar{f} \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$. On definit

$$\|\bar{f}\|_1 \overset{\text{def}}{:=} \int \overline{|f|}\, d\mu = \int |f|\, d\mu = \|f\|_1$$

On a bien $\|\bar{f}\|_1 = 0 \iff \bar{f} = 0$.

# IV $L^1$ est complet

on veut un théorème de commutation des signes $\int_X$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$ pour des applications à termes complexes.

pour les applications à termes positifs, on a le théorème de Beppo LEVI

Rudin 1.3.8 Gramain V.4 Corollaire 1

th Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \longrightarrow \mathbb{C}$ une suite d'applications intégrables telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_1 < +\infty$

Alors 1) la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge presque partout pour tout $x \in X$ :

c à d $\exists E \in \mathcal{A}$ tq $\mu(E) = 0$ et $\forall x \notin E$ $\sum f_n(x)$ converge

2) Prenons un tel $E$ quelconque

Soit $S(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) & \text{si } x \notin E \\ 0 & \text{si } x \in E \end{cases}$

alors $S \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$

3) La série complexe $\sum \int_X f_n \, d\mu$ converge a pour somme $\int_X S \, d\mu$.

4) La série d'éléments de $L^1(X, \mu; \mathbb{C})$ $\sum f_n, n \in \mathbb{N}$ converge dans $L^1(X, \mu, \mathbb{C})$ et a pour somme $S$.

évidemment : Si on fait la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge pour tout $x \in X$ on peut prendre $E = \emptyset$.
 cf exemple Exo 4 feuille 5

Rudin 1.3.8 Gramain V.4 Corollaire 1 

Th : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \longrightarrow \mathbb{C}$ une suite

d'applications integrables telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_1 < +\infty$

Alors 1) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge presque partout pour tout $x \in X$

2) Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ la fonction somme definie

presque partout pour tout $x \in X$

alors $S \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$

3) La serie d'elements de $L^1(X, \mu, \mathbb{C})$ converge dans $L^1(X, \mu, \mathbb{C})$ vers $S$

4) La serie complexe $\sum \int_X f_n \, d\mu$ converge

et a pour somme $\int_X S \, d\mu$ .

Preuve On applique le théorème de Beppo LEVI

a la serie d'applications $\sum |f_n|$

on obtient donc que l'application $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n| : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

est mesurable à valeurs positives

et on a l'egalite

$$\int_X \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n| \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < +\infty$$

Comme $\int_X \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n| \, d\mu < +\infty$, on a vu Proposition

chap 4, I, $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n| < +\infty$ presque partout

c à d la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge absolument presque

partout pour tout $x \in X$. Donc comme la convergence

absolue implique la convergence, on a obtenu 1).

c à d $\exists E \in \mathcal{A}$ tq $\mu(E^c) = 0$ et $\forall x \in E$,

$\sum f_n(x)$ converge ~~absolument~~.

Prenons un tel E quelconque

Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite d'applications $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right) \chi_{E^c}$

- les applications $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right) \chi_{E^c}$ produit et somme d'applications mesurables sont mesurables de X dans $\mathbb{C}$

- $\left|\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right) \chi_E(x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \chi_E(x) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| \cancel{\chi_E(x)}$

~~$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| \chi_E(x)$ produit de 2 applications mesurables à valeurs positives de $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une application mesurable à valeurs positives de $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. En fait, comme $\forall x \in X$ $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| \chi_{E^c}(x)$, d'après l'exo "resolution de l'ensemble d'arrivee"~~

$\cancel{\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| \varphi_E}$ ~~est une application mesurable de X dans IR.~~

$$\cancel{\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| \varphi_E = \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|}$$ ~~presque partout~~

~~donc~~ $$\cancel{\int \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| \varphi_E = \int \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| < +\infty}$$

~~donc~~ $$\cancel{\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| \varphi_E \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R})}$$

Le th de convergence dominee marche ~~m~~ si la fonction g qui dominee prend la valeur $+\infty$

- ~~S est definie sur E au moins~~

~~Soit $\bar{S}$ le prolongement de S sur X par 0 en dehors de E)~~

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k \, \varphi_{E^c} = \bar{S}$$

d'apres le theoreme de convergence dominee

$$\bar{S} \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C}) \quad \text{c à d } 2)$$

la suite de complexes $\int_X \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \varphi_E \, d\mu$.

converge vers $\int_X \bar{S} \, d\mu$.

Comme $b_k = b_k \varphi_{E^c}$ presque partout

$$\int_X \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \varphi_{E^c} = \sum_{k=0}^{n} \int_X b_k \varphi_{E^c} \, d\mu = \sum_{k=0}^{n} \int_X b_k \, d\mu.$$

on a donc obtenu 3)

D'après la démonstration du théorème de convergence dominée

$$\int_X \left| \sum_{k=0}^{n} f_k \chi_{E^c} - S \right| d\mu \xrightarrow[\text{qd } n \to +\infty]{} 0$$

$$\| \sum_{k=0}^{n} f_k \chi_{E^c} - S \|_1$$

c. à d. la suite $\sum_{k=0}^{n} f_k \chi_{E^c}$ converge ($f_k$ dans $L^1$)

dans $L^1(X, \mu, \mathbb{C})$ vers $S$ on a donc obtenu 4).

Lemme Soit $E$ un espace vectoriel normé
$E$ est complet ssi toute série absolument convergente est convergente

Le théorème précédent nous dit que toute série absolument convergente dans $L^1$ est convergente.

Corollaire (théorème de Riesz-Fischer)
$L^1(X, \mu, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel normé complet

fin du Cours Vendredi 8 Décembre

preuve du Lemme

preuve de $\Rightarrow$ vu en $2^{\text{ème}}$ année

Soit $\sum f_n$ une série absolument convergente
i.e la série réelle $\sum \|f_n\|$ converge
i.e la suite des sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|$ converge
donc la suite des sommes partielle
$\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|$ est de Cauchy (car toute suite convergente est de Cauchy)

c à d $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \forall p \in \mathbb{N} \; \sum_{k=n+1}^{n+p} \|b_k\| \leq \varepsilon$ 96

d'après l'inégalité triangulaire $\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|b_k\| \leq \varepsilon$

donc la suite des sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} b_k$ est de Cauchy dans $E$. Comme $E$ est complet, elle converge donc.

preuve de $\Leftarrow$ le sens qui nous intéresse

Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $E$

c à d $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall m, n \geq N \quad \|b_m - b_n\| \leq \varepsilon$

Posons $\varphi(0) = 0$ de proche en proche, choisissons

$\varphi(0) < \varphi(1) < \quad < \varphi(n) < \varphi(n+1) <$

tq. $\|b_{\varphi(n+1)} - b_{\varphi(n)}\| \leq \frac{1}{2^n}$

Comme la série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, par comparaison la série $\sum b_{\varphi(n)} - b_{\varphi(n-1)}$ converge absolument

donc converge par hypothèse c à d la suite des sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} (b_{\varphi(k)} - b_{\varphi(k-1)}) = b_{\varphi(n)} - b_{\varphi(0)}$ converge donc la suite $b_{\varphi(n)}$ converge vers $b$

Propriété Toute suite de Cauchy admettant au moins une valeur d'adhérence $b$ converge vers cette valeur d'adhérence

$\forall m \geq N \quad \varphi(m) \geq m \geq N$ donc $\|b_{\varphi(m)} - b_m\| \leq \varepsilon$

la norme est une application continue

donc $\lim\limits_{m \to +\infty} \| f_{\varphi(m)} - f_n \| = \| f - f_n \|$

d'où $\| f - f_n \| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

c à d $\lim f_n = f$.

Variante $\Big| \| f_{\varphi(m)} - f \| - \| f - f_n \| \Big| \leq \| f_{\varphi(m)} - f_n \| \leq \varepsilon$

$\| f_{\varphi(m)} - f \| \xrightarrow{\text{qd } m \to +\infty} 0$

donc il reste $\| f - f_n \| \leq \varepsilon$ $\square$

En fait, on a demontre un aussi une autre corollaire

Corollaire Soit $f_n$ une suite convergente dans $L^1(X, \mu, \mathcal{Q})$ vers $f$. Alors il existe une sous suite de $f_n$ qui converge presque partout vers $f$.

preuve : On ne peut pas esperer en general que la suite $f_n$ converge presque partout vers $f$

voir ex la boxe glissante

preuve d'apres la preuve de "$\Leftarrow$" dans le lemme

la serie $\sum f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n-1)}$ converge absolument dans $L^1$

d'apres le 1) et 4) la serie $\sum f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n-1)}$ converge presque partout pour tout $x \in X$. vers $S$

et converge aussi vers $S$ dans $L^1$.

donc la suite $f_{\varphi(n)}$ converge presque partout et aussi dans $L^1$ vers $f_{\varphi(0)} + S = f$ par unicite de la limite dans $L^1$

demo du Rudin plus rapide

# IV L'espace vectoriel normé $L^2(X, \mu, \mathbb{C})$ Guichardet 1.9

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable

Soit $\mu$ une mesure sur $X$

déf $\mathcal{L}^2(X, \mu, \mathbb{C}) :=$ ensemble des applications $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurables tq $\int_X |f|^2 d\mu < +\infty$

Requête $\mathcal{L}^2(X, \mu, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-ev

preuve Montrons que $\mathcal{L}^2(X, \mu, \mathbb{C})$ est un sev du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^X$ constitué des applications de $X$ dans $\mathbb{C}$.

Soient $f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mu, \mathbb{C})$ dans ENS lyon p 14

$$|f+g|^2 \leqslant (|f| + |g|)^2 \leqslant (2 \max(|f|, |g|))^2 = 4 \max(|f|^2, |g|^2)$$
$$\leqslant 4(|f|^2 + |g|^2)$$

donc $\int |f+g|^2 \leqslant 4\int |f|^2 + 4\int |g|^2 < +\infty$ donc $f+g \in \mathcal{L}^2(X, \mu, \mathbb{C})$

$\square$

clair le reste

déf $L^2(X, \mu, \mathbb{C}) := \mathcal{L}^2(X, \mu, \mathbb{C}) \big/ f \sim g$ ssi $f = g$ presque partout

Théorème $L^2(X, \mu, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni du produit scalaire hermitien

$$\langle\ ,\ \rangle : L^2(X,\mu,\mathbb{C}) \times L^2(X,\mu,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(f,g) \longmapsto \langle f,g\rangle := \int_X f\bar{g}\, d\mu$$

$\bar{g}$ conjugué de $g$

En particulier, $\|f\|_2 = \sqrt{\int f^2}$ est une norme sur $L^2(X,\mu,\mathbb{C})$

et Inegalité de Cauchy - Schwarz

Si $f$ et $g \in L^2(X,\mu;\mathbb{C})$ alors $fg \in L^1(X,\mu,\mathbb{C})$

et on a $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2\, \|g\|_2$

Preuve Soient $f$ et $g \in \mathcal{L}^2(X,\mu,\mathbb{C})$

$$|fg| = |f|\,|g| \leqslant \frac{|f|^2+|g|^2}{2}$$

donc $\displaystyle\int |fg| \leqslant \frac{1}{2}\int |f|^2 + \frac{1}{2}\int |g|^2 < +\infty$

donc $fg \in \mathcal{L}^1(X,\mu,\mathbb{C})$

on a aussi $f\bar{g} \in \mathcal{L}^1(X,\mu,\mathbb{C})$

donc $\displaystyle\int_X f\bar{g}\, d\mu$ existe.

donc $\mathcal{L}^2(X,\mu,\mathbb{C})$ est muni de la forme

sesquilinéaire $\langle f,g\rangle := \int_X f\bar{g}\, d\mu$

Cette forme hermitienne est positive car

$$\langle f,f\rangle := \int f\bar{f}\, d\mu = \int |f|^2\, d\mu \in \mathbb{R}^+$$

donc Cours d'Algèbre $2^{\text{ème}}$ année

Ramis - Deschamps - Odoux tome 2 3.3.2 Proposition III

on a l'inégalité triangulaire pour $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$

$$\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 \quad \text{pour tout } f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mu, \mathbb{C})$$

On est maintenant dans la même situation que pour $\mathcal{L}^1$

en faisant la même chose voir Briane-Pagès 9.3.2

$L^2(X, \mu, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel

$\| \ \|_2$ est une norme sur $L^2(X, \mu, \mathbb{C})$

donc la forme hermitienne positive sur $L^2(X, \mu, \mathbb{C})$

est définie :

$$\forall f \in L^2(X, \mu, \mathbb{C}) \quad \langle f, f\rangle = 0 \iff f = 0$$

on a donc <u>un produit scalaire</u> hermitien.

Puisque $\langle \ , \ \rangle$ est une forme hermitienne positive

sur $\mathcal{L}^2(X, \mu, \mathbb{C})$, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mu, \mathbb{C}) \quad |\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2$$

en prenant $|f|$ et $|g|$ $\langle |f|, |g| \rangle = \|fg\|_1$

donc

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2$$

$\square$

Théorème $L^2(X, \mu, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel normé complet

Preuve: même démonstration que dans le cas de $L^1$

Rappel

Soit $X$ un ensemble denombrable. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to X$ une bijection

Soit $\delta$ la mesure de denombrement sur l'espace

mesurable $(X, \mathcal{P}(X))$.

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application à valeurs positives

alors $$\int_X f(x)\, d\delta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(\varphi(n))$$

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ une application

Si $f \in \mathcal{L}^1(X, \delta, \mathbb{C})$ (c à d $\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f(\varphi(n))$ converge absolument)

alors $$\int_X f(x)\, d\delta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(\varphi(n)).$$

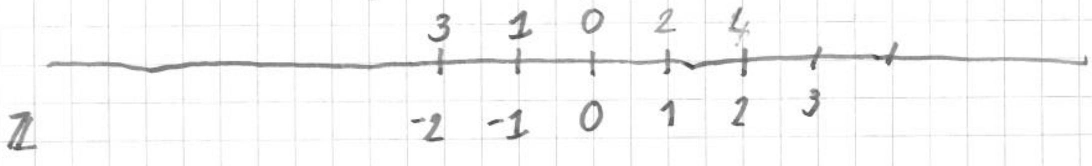
# VI Série de Fourier

Considérons l'espace mesurable $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ muni de la mesure de dénombrement $\delta$. On note $\ell^p(\mathbb{Z}) = \mathcal{L}^p(\mathbb{Z}, \delta, \mathbb{C}) = L^p(\mathbb{Z}, \delta, \mathbb{C})$

presque partout = partout car le seul ensemble de mesure nulle est $\emptyset$.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la bijection

$$n \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{(n+1)}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$




Soit $c : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$

$n \longmapsto c_n$ $\qquad c$ est mesurable

d'après Exo les séries vues comme des intégrales de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{Z}} |c_n| \, d\delta = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_{\varphi(n)}| = |c_{\varphi(0)}| + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( |c_{\varphi(2n-1)}| + |c_{\varphi(2n)}| \right)$$

$$= |c_0| + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( |c_{-n}| + |c_n| \right) \text{ notée } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|$$

donc $\ell^1(\mathbb{Z}) = \left\{ c : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tq la série } \sum_{n \in \mathbb{Z}}^{+\infty} \{c_n\}, n \in \mathbb{Z}, \text{ CVA} \right\}$

et si $c \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}} c_n \, d\delta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n$

~~Considérons $[0, 2\pi[$ muni de la σ-algèbre~~

Considérons l'espace mesurable $([0, 2\pi[, \mathcal{B} \cap \mathcal{P}[0, 2\pi[)$

Soit $\mu$ la mesure de Lebesgue restreinte à $[0, 2\pi[$

En divisant $\mu$ par $2\pi$, on obtient la probabilité $\mu/_{2\pi}$.

$L^2\left([0,2\pi[, \frac{\mu}{2\pi}, \mathbb{C}\right)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé muni d'un produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{[0,2\pi[} f\bar{g}\, d\frac{\mu}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[} f\bar{g}\, d\mu.$$

$$id_{[0,2\pi[} \in L^2\left([0,2\pi[, \frac{\mu}{2\pi}, \mathbb{C}\right)$$

donc $L^2\left([0,2\pi[, \frac{\mu}{2\pi}, \mathbb{C}\right) \subset L^1\left([0,2\pi[, \frac{\mu}{2\pi}, \mathbb{C}\right)$

donc pour tout application $f \in L^1\left([0,2\pi[, \frac{\mu}{2\pi}, \mathbb{C}\right)$

on peut définir ses coefficients de Fourier

$$c_n(f) := \langle f / e^{int}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[} f\, e^{-int}\, d\mu(t)$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$

Théorème: de Riesz-Fischer (1907). L'application linéaire

$$L^2\left([0,2\pi[, \frac{\mu}{2\pi}, \mathbb{C}\right) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$
$$f \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$$

est une bijection qui préserve les normes $\| \;\|_2$, c.à.d un isomorphisme d'espace vectoriels normés.

Corollaire (Egalité de Parseval)

Soit $f \in L^2\left([0,2\pi[, \frac{\mu}{2\pi}, \mathbb{C}\right)$ alors $\sum |c_n(f)|^2$ CV et on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[} |f(t)|^2\, d\mu(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

Preuve du Corollaire à partir du théorème

Dans $L^2([0,2\pi[, \frac{\mu}{2\pi}, \mathbb{C})$ $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi[} |f(t)|^2 \, d\mu(t)$

Dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ $\|(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_2^2 = \int_{\mathbb{Z}} |c_n|^2 \, d\delta \underset{\text{on a vu}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$

# VII L'espace vectoriel normé $L^\infty(X, \mu, \mathbb{C})$

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable muni d'une mesure $\mu$

Soit $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une application mesurable à valeurs positives
$\mathbb{R}$

Soit $M \in [0, +\infty]_{\mathbb{R}^+}$

déf $M$ est un majorant essentiel de $g$

ssi $M$ majore $g$ presque partout

$g(x) \leqslant M$ presque partout

$\Longleftrightarrow \mu(\{x \in X \text{ tq } g(x) > M\}) = 0$

preuve
$\{x \in X \text{ tq } g(x) > M\} = g^{-1}(]M, +\infty[)$

$]M, +\infty[$ ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ comme $g$ mesurable
$\mathbb{R}$

$g^{-1}(]M, +\infty[) \in \mathcal{A}$.

preuve de $\Rightarrow$ Si $g(x) \leqslant M$ presque partout

alors $\exists\, N \in \mathcal{A}$ tq $\mu(N) = 0$

et $\forall x \in X \setminus N \quad g(x) \leqslant M$

donc $\{x \in X \text{ tq } g(x) > M\} \subset N$

Comme $\mu(N) = 0 \quad \mu(\{x \in X \text{ tq } g(x) > M\}) \leqslant \mu(N)$ est donc nul

preuve de $\Leftarrow$ Prenons $N = \{x \in X \text{ tq } g(x) > M\}$, $N \in \mathcal{A}$

et $\mu(N) = 0$ et $\forall x \in X \setminus N \quad g(x) \leqslant M$.

Prop et déf Si $g$ admet au moins un majorant essentiel

L'ensemble des majorants essentiels de $g$ admet un

plus petit élément appelé borne supérieure essentielle

Si $g$ n'est pas majoré essentiellement, on pose borne supérieure essentielle $= +\infty$

borne supérieure essentielle $\overset{\text{déf}}{=}$ plus petit des majorants essentiels $\in [0, +\infty]$

On suppose que $g$ est majoré essentiellement

preuve Soit $S$ l'ensemble des majorants essentiels de $g$

$S$ est une partie de ~~$\overline{\mathbb{R}}$~~ $\mathbb{R}$ non vide minorée par $0$

~~Comme toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne inférieure~~

donc $S$ admet une borne inf $\inf S \geqslant 0$.

~~$\forall M \in S$ $0 < M$ c à d $0$ minorant de $S$, comme inf plus grand des minorants $\inf S \geqslant 0$~~

Si $M \in S$ alors $\forall M' \geqslant M$ $M' \in S$

donc $S$ est, de la forme $]\inf S, +\infty[$ ou $[\inf S, +\infty[$,

preuve $\forall M' > \inf S$ $M'$ pas un minorant de $S$ donc $\exists M \in S$ tq $M < M'$ donc $M' \in S$ $\square$

$$g^{-1}\left(\left]\inf S, +\infty\right[\right) = g^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left]\inf S + \frac{1}{n}, +\infty\right[\right)$$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g^{-1}\left(\left]\inf S + \frac{1}{n}, +\infty\right[\right)$$

donc $\mu\left(g^{-1}\left]\inf S, +\infty\right[\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mu\left(g^{-1}\left(\left]\inf S + \frac{1}{n}, +\infty\right[\right)\right) = 0$

$\inf S + \frac{1}{n} \in S$ donc $\mu\left(g^{-1}\left]\inf S + \frac{1}{n}, +\infty\right[\right) = 0$ $\square$

def Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ une application mesurable

$\|f\|_\infty =$ borne supérieure essentielle de $|f|$ $\in [0, +\infty]$

$\mathcal{L}^\infty(X, \mu, \mathbb{C}) :=$ ensemble des applications mesurables $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$

tel que $\|f\|_\infty < +\infty$ c à d tel que $|f|$ est majoré essentiellement

Propriété a) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty$

b) $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ inégalité triangulaire

c) $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$ presque partout

Preuve de b) Comme $\|f\|_\infty$ est un majorant essentiel de $|f|$

$$\left.\begin{array}{l} |f| \leqslant \|f\|_\infty \text{ presque partout} \\ \text{de même } |g| \leqslant \|g\|_\infty \text{ presque partout} \end{array}\right\}$$

donc $\quad |f+g| \leqslant |f| + |g| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

donc $\quad \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant essentiel de $|f+g|$

Comme $\|f+g\|_\infty$ est le plus petit, $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

c) $\|f\|_\infty = 0 \quad \Rightarrow |f| \leqslant 0$ presque partout

$\Rightarrow f = 0$ presque partout $\square$

d'après a) et b) $\mathcal{L}^\infty(X, \mu, \mathbb{C})$ est donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et on obtient comme pour $L^1$ et $L^2$

Théorème $L^\infty(X, \mu, \mathbb{C}) := \mathcal{L}^\infty(X, \mu, \mathbb{C}) / _{f \sim g \text{ ssi } f = g \text{ presque partout}}$

est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

$\| \ \|_\infty$ définit une norme sur $L^\infty(X, \mu, \mathbb{C})$.

Propriété Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ une application mesurable

alors 1) $\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$

2) Il existe une application $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurable

telle $f = g$ presque partout et $\sup_{x \in X} |g(x)| = \|f\|_\infty$

Preuve 1) $f \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$ partout donc presque partout

Comme $\| \|_\infty$ = plus petit des majorants essentiels

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$$

2) Soit $N = \{ x \in X \text{ tq } |f(x)| > \|f\|_\infty \}$

Comme $\|f\|_\infty$ est un majorant essentiel de $|f|$, $\mu(N) = 0$

Prenons $g := f \chi_{X \setminus N}$. $f = g$ presque partout

Comme $N \in \mathcal{A}$, l'application caractéristique $\chi_{X \setminus N}$ est

mesurable donc $g$ aussi.

Si $x \notin N$, $|g(x)| = |f(x) \chi_{X \setminus N}(x)| = |f(x) 1| \leq \|f\|_\infty$

Si $x \in N$ $|g(x)| = 0 \leq \|f\|_\infty$

donc bien $\forall x \in X$ $|g(x)| \leq \|f\|_\infty$ donc $\sup_{x \in X} |g(x)| \leq \|f\|_\infty$

d'après 1) $\|g\|_\infty \leq \sup_{x \in X} |g(x)|$

Comme $f = g$ presque partout, $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$

donc on a obtenu

$$\sup_{x \in X} |g(x)| = \|f\|_\infty \qquad \square$$

Théorème $L^\infty(X, \mu, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel normé complet.

Preuve : Soit $f_n$ une suite d'élements de $\mathcal{L}^\infty$ telle que la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge

d'après la propriété 2) précédente $\exists\, g_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$ bornée mesurable telle que $f_n = g_n$ presque partout

$$\text{et} \quad \sup_{x \in X} |g_n(x)| = \|f_n\|_\infty$$

donc la série $\sum \sup_{x \in X} |g_n(x)|$ converge

c à d la série $\sum g_n$ converge normalement donc uniformément sur $X$. donc aussi simplement sur $X$.

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ la somme de la série $\sum g_n(x)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $g_n$ est mesurable donc $S$ est mesurable.

La limite uniforme d'applications bornées est une application bornée donc comme les $g_n$ sont bornées, $S$ est bornée donc $|S|$ est majoré essentiellement donc $S \in \mathcal{L}^\infty$.

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} g_k - S \right\|_\infty \leqslant \sup_{x \in X} \left| \sum_{k=0}^{n} g_k - S \right| \xrightarrow[qd\ n \to +\infty]{} 0$$

donc la série $\sum g_n$ converge dans $L^\infty$

Comme $f_n = g_n$ dans $L^\infty$, on a montré que tout série $\sum f_n$ dans $L^\infty$ qui converge en norme, converge. Donc d'après Lemme section IV $L^\infty$ est complet

référence Gramain Intégration Chapitre VII Section 3 p 154. $\square$

Remarque : L'espace vectoriel des applications bornées de $X$ dans $\mathbb{C}$ muni de la norme de la convergence uniforme $\sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty$ est un espace vectoriel normée pour tout ensemble $X$. Le point clé de la preuve précédente est que cet espace vectoriel normée est complet ("convergence normale $\Rightarrow$ uniforme")