

Remarque Soit (X, dt) un espace mesurable.

Soit $f: (X, dt) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable

alors $\tilde{f}: (X, dt) \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est mesurable

$$x \longmapsto f(x)$$

preuve : Soit $g: \mathbb{R} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ l'injection canonique

$$a \longmapsto \underline{a}$$

Soit O un ouvert de $\bar{\mathbb{R}}$. $g^{-1}(O) = O \cap \mathbb{R}$

Par définition de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$

$O \cap \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Puisque g est continue.

Par définition $\tilde{f}$ est la composée $g \circ f$. Comme f est mesurable et g continue alors $\tilde{f}$ est mesurable.

Intégrale des applications à valeurs complexes

$$\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R}) = \{ f: X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable \& intégrable} \}$$

I Intégrale des applications à valeurs réelles

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable

Soit μ une mesure sur X .

Soit $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable

donc on a m que $f_+^{''} = \max(f, 0)$ et $f_-^{''} = \min(f, 0)$ et $|f|: X \longrightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables à valeurs positives

def f est intégrable (au sens de Lebesgue)

$$\Leftrightarrow \int_X |f| d\mu < +\infty$$

Si f est intégrable

$$f_+ \leq |f| \text{ donc } \int_X f_+ d\mu \leq \int_X |f| d\mu < +\infty$$

$$f_- \leq |f| \text{ donc } \int_X f_- d\mu \leq \int_X |f| d\mu < +\infty$$

donc on pose

$$\int_X f d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu$$

Rem Si $f \geq 0$, comme $f_- = 0$ et $f = f_+$

cette définition généralise la définition de l'intégrale
d'une application à valeurs positives

linéarité de l'intégrale Si $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

alors $f + g \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R})$ $\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R})$ est un
s.e.v. du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^X$ constitué des

applications de X dans $\mathbb{R}$ donc est lui-même

un $\mathbb{R}$ -e.v. et on a

$$\int f + g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$$

$$\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$$

Preuve cf Rudin

$f + g$ somme d'applications mesurables de X dans $\mathbb{R}$
est mesurable. Comme $|f + g| \leq |f| + |g|$

$$\int |f + g| \, d\mu \leq \int (|f| + |g|) \, d\mu = \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu < +\infty$$

additivité
car $|f|, |g| \geq 0$

donc $f + g \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R})$

$$f = f_+ - f_- \quad g = g_+ - g_-$$

$$\text{donc } f + g = f_+ - f_- + g_+ - g_-$$

$$f+g = (f+g)_+ - (f+g)_-$$

donc on a l'égalité d'applications positives

$$(f+g)_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + (f+g)_-$$

d'où d'après l'additivité pour les applications positives

$$\int (f+g)_+ + \int f_- + \int g_- = \int f_+ + \int g_+ + \int (f+g)_-$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \int f+g &= \int (f+g)_+ - \int (f+g)_- = \int f_+ - \int f_- + \int g_+ - \int g_- \\ &= \int f + \int g \end{aligned}$$

Si $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable alors αf aussi. Comme $|\alpha f| = |\alpha| |f|$

$$\int |\alpha f| d\mu = |\alpha| \int |f| d\mu < +\infty \text{ donc } \alpha f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R})$$

cas $\alpha \geq 0$

$$(\alpha f)_+ = \alpha f_+ \quad (\alpha f)_- = \alpha f_-$$

d'où

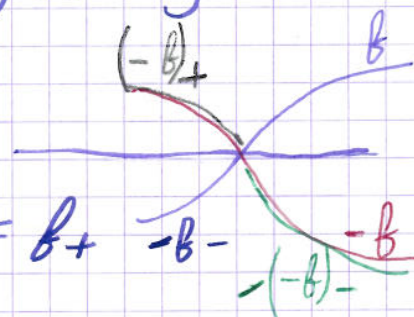
$$\begin{aligned} \int \alpha f &= \int \alpha f_+ - \int \alpha f_- = \alpha \int f_+ - \alpha \int f_- \\ &= \alpha \int f \end{aligned}$$

cas $\alpha = -1$

$$(-f)_+ = f_- \quad (-f)_- = f_+$$

donc

$$\begin{aligned} \int -f &= \int (-f)_+ - \int (-f)_- = \int f_- - \int f_+ d\mu \\ &= - \int f d\mu \end{aligned}$$



cas $\alpha < 0$

$$\int \alpha f = \int -(-\alpha)f \underset{\text{cas } \alpha = -1}{=} - \int (-\alpha)f \underset{\text{cas } -\alpha \geq 0}{=} -(-\alpha) \int f$$

□

Aulement dit
l'application

$$L^1(X, \mu, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto \int_X f d\mu$$

est une forme linéaire

Positive: Si f et $g \in L^1(X, \mu, \mathbb{R})$

$$f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$$

preuve $g - f \geq 0$ donc $\int g - f \geq 0$
 $\int g - \int f$

II Intégrale des applications à valeurs complexes

Soit $(X, \mathcal{F})$ un espace mesurable

Soit μ une mesure positive sur X

Soit $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurable alors on a m que $\text{Re } f: X \rightarrow \mathbb{R}$

et $\text{Im } f: X \rightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables

def f est intégrable si $\int_X |f| d\mu$ est fini

$$L^1(X, \mu, \mathbb{C}) := \left\{ f: X \longrightarrow \mathbb{C} \text{ et } \int_X |f| d\mu < \infty \right\}$$

$$\begin{aligned} |\text{Re } f| &\leq |f| \\ |\text{Im } f| &\leq |f| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a| &\leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b| \\ |f| &\leq |\text{Re } f| + |\text{Im } f| \end{aligned}$$

donc f intégrable car $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont intégrables

définition

$$\int f := \int \operatorname{Re} f + i \int \operatorname{Im} f$$

Propriété $\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$ -ev

$$\begin{aligned} \text{et } \int : \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \int_X f \, d\mu \end{aligned}$$

est une forme $\mathbb{C}$ -linéaire

Preuve • $\mathbb{C}$ -ev EVIDENT

Si $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

alors $\alpha f + \beta g$ est mesurable

$$\text{et } \int |\alpha f + \beta g| \leq |\alpha| \int |f| + |\beta| \int |g| < +\infty$$

• $\mathbb{R}$ -linéarité EVIDENT

Soit $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int \alpha f + \beta g &= \int \underbrace{\operatorname{Re}(\alpha f + \beta g)}_{\alpha \operatorname{Re} f + \beta \operatorname{Re} g} + i \int \underbrace{\operatorname{Im}(\alpha f + \beta g)}_{\alpha \operatorname{Im} f + \beta \operatorname{Im} g} \\ &= \alpha \int \operatorname{Re} f + \beta \int \operatorname{Re} g + i \alpha \int \operatorname{Im} f + i \beta \int \operatorname{Im} g \\ &= \alpha \int f + \beta \int g \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } f \in \mathcal{L}^2(X, \mu, \mathbb{C}) \quad f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f \\ \text{alors } if = -\operatorname{Im} f + i \operatorname{Re} f \end{array} \right.$$

$$\text{donc } \int if = \int -\operatorname{Im} f + i \int \operatorname{Re} f = i$$

$$i \int \operatorname{Re} f - \int \operatorname{Im} f = i \left(\int \operatorname{Re} f + i \int \operatorname{Im} f \right) = i \int f$$

$$\text{donc } \int (a+ib)f \stackrel{\text{EVIDENT}}{=} \int af + ibf = a \int f + b \int if$$

par \$\mathbb{R}\$-linéarité

$$= a \int f + b i \int f = (a+ib) \int f$$

Propriété

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|$$

preuve

si $\int f = 0$, c'est vrai

sinon en remplaçant f par $\frac{f}{\int f}$ on peut

supposer que $\int f = 1$

en effet $\int \frac{f}{\int f} = \frac{\int f}{\int f} = 1$

$\mathbb{C}$ -linéarité de $\int$

et $|1| \leq \int \left| \frac{f}{\int f} \right|$ implique $\left| \int f \right| \leq \int |f|$

donc dans le cas $\int f = 1 \in \mathbb{R}$

$$\text{donc } 1 = \int f = \int \operatorname{Re} f \leq \int |\operatorname{Re} f| \leq \int |f| \quad \square$$

III Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable muni d'une mesure positive μ
 C'est le plus important du cours

Soit $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$ une suite
 d'applications mesurables telle que

• $\forall x \in X$, la suite $f_n(x)$ converge vers $f(x)$

• il existe $g \in L^1(X, \mu, \mathbb{R})$ c.à.d. $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$
 mieux il existe $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable à valeurs positives tq $\int g < +\infty$
 est mesurable et intégrable g indépendant de n !

$$\text{tq } \forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n| \leq g$$

On dit que g domine la suite f_n

Alors 1) $f \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$

2) la suite de complexes $\int_X f_n d\mu$

converge vers $\int_X f d\mu$

fin cours Vendredi 23 Novembre 2006

Preuve 1) f limite d'applications de $X \longrightarrow \mathbb{C}$
 mesurables est mesurable. $\forall n \quad |f_n| \leq g$

donc $\int |f_n| \leq \int g < +\infty$ donc f_n intégrable

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad |f_n(x)| \leq g(x)$$

d'où en faisant tendre n vers $+\infty$ $|f(x)| \leq g(x)$

d'où f est intégrable.

2) Cas où les f_n sont une suite d'applications mesurables de X dans $\mathbb{R}$ à valeurs positives

convergent vers l'application nulle Lemme 3 Gromain p101

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \leq g.$$

On applique le lemme de Fatou à $g - f_n$.

$$\text{on obtient } \int \liminf (g - f_n) \leq \liminf \int (g - f_n)$$

~~$$\liminf (g - f_n) = \lim (g - f_n) = g - \lim f_n = g$$~~

Ma $\lim_{n \rightarrow +\infty} (g(x) - f_n(x))$ existe

$$\begin{aligned} \text{donc } \liminf_{n \rightarrow +\infty} (g(x) - f_n(x)) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (g(x) - f_n(x)) \\ &= g(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = g(x) \end{aligned}$$

$$\liminf \int (g - f_n) = \liminf \left(\int g - \int f_n \right)$$

$$= \int g - \limsup \int f_n$$

car soient a_n une suite de $\mathbb{R}$

$$\liminf (f + a_n) = - \limsup a_n \quad \text{et} \quad \liminf (C + a_n)$$

$$= C + \liminf a_n \quad C \text{ constante}$$

Donc Fatou donne $\int g \leq \int g - \limsup \int b_n$

Comme $\int g$ est fini, on obtient $\limsup \int b_n \leq 0$.

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n \geq 0$ donc $\int b_n \geq 0$

donc $0 \leq \liminf \int b_n \leq \limsup \int b_n \leq 0$

donc $\liminf \int b_n = \limsup \int b_n = 0$

donc la suite $\int b_n$ converge vers 0

Cas general

$|b_n - f|$ est une suite d'applications

mesurables de X dans $\mathbb{R}$ à valeurs positives convergent vers l'app. nulle

$$|b_n - f| \leq |b_n| + |f| \leq 2g$$

donc la suite $\int |b_n - f|$ converge vers 0

$$\left| \int b_n - \int f \right| = \int |b_n - f| \leq \int |b_n - f| \xrightarrow{\text{d'après la suite précédente}} 0 \quad \text{qd } n \rightarrow +\infty$$

donc la suite de complètes $\int b_n$ converge vers $\int f$

IV Théorème de continuité sous le signe $\int$

73

Rappel Caractérisation de la continuité par des suites

Soit X un espace métrique (exemple X est une partie de $\mathbb{R}^n$)

Soit $F: X \longrightarrow \mathbb{C}$ une application définie sur X

Soit $x \in X$.

F est continue en x suivant X ssi pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X convergent vers x , la

suite complexe $F(x_n)$ converge vers $F(x)$

Théorème de continuité sous le signe $\int$

Soit X un espace métrique (exemple X est une partie de $\mathbb{R}^n$)

Soit (T, dt) un espace mesurable muni d'une mesure

positive μ .

T comme temps. On intègre par rapport au temps

Notation $\int_T \varphi d\mu$ sera noté $\int_T \varphi(t) d\mu(t)$

Soit $f: X \times T \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(x, t) \longmapsto f(x, t)$$

une application définie sur $X \times T$

tg ① $\forall x \in X$, l'application partielle

$$f(x, \cdot): T \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto f(x, t)$$

est mesurable sur T

② $\forall t \in T$, l'application partielle

$$f(\cdot, t): X \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto f(x, t)$$

74

est continue sur X

(3) Il existe $g \in \mathcal{B}^1(T, \mu, \mathbb{R})$ tq

$$\forall x \in X \quad |f(x, t)| \leq g(t)$$

$$\forall t \in T$$

Alors l'application $F: X \longrightarrow \mathbb{C}$

$$x \longmapsto \int_T f(x, t) d\mu(t)$$

est continue sur X .

Preuve: On applique la caractérisation de la continuité d'une application par des suites et le théorème de convergence dominée:

Soit $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X convergent vers x

donc $\forall t \in T$, la suite $f(x_m, t)$ converge vers $f(x, t)$

$$\forall t \in T, \forall m \in \mathbb{N} \quad |f(x_m, t)| \leq g(t)$$

avec $g \in \mathcal{B}^1(T, \mu, \mathbb{R})$

donc on peut appliquer le Théorème de convergence dominée. On obtient que la suite de complexes

$$F(x_m) = \int_T f(x_m, t) d\mu(t) \text{ converge vers } F(x) = \int_T f(x, t) d\mu(t)$$

donc F est continu en x sur X . $\square$

Cas particulier $(T, dt) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$

et μ est la mesure de dénombrement sur $\mathbb{N}$
 Rappel (Devoir 2)

Soit $u: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ une suite de complexes

alors u est mesurable toujours.

u est intégrablessi la série $\sum u_n$ converge absolument.

$$\text{Dans ce cas } \int_{\mathbb{N}} u(n) d\mu(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Le théorème de continuité sous le signe $\int$
 devient donc

Théorème de continuité de la somme d'une série d'applications

Soit X un espace métrique.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}: X \longrightarrow \mathbb{C}$ une suite d'applications
 définies et ② continues sur X tq ① rien à vérifier

③ il existe une suite de reels g_n
 dont la série $\sum g_n$ converge absolument
 et $\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N} |f_n(x)| \leq g_n$
 c à d tq la série d'applications $\sum f_n$
 converge normalement sur X

"en 2^{ème} année" "uniformement"

Alors la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x)$ est continue sur X

Cas particulier $T = [a, b[$ $a < b$ éventuellement $b = +\infty$

Soit μ la mesure de Lebesgue restreinte à $[a, b[$

Soit $\varphi : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue sur $[a, b[$. Alors φ est mesurable sur $[a, b[$.

On verra en outre que $\varphi \in L^1([a, b[, \mu, \mathbb{C})$ où l'intégrale de Riemann généralisée $\int_a^b \varphi(t) dt$

converge absolument et que dans ce cas

$$\int_{[a, b[} \varphi(t) d\mu(t) = \int_a^b \varphi(t) dt$$

Le théorème de continuité sous le signe $\int$ implique donc

Théorème de continuité sous le signe $\int$ pour les généralisées

|| en 2^{ème} année ||

Soit $f: X \times [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$
 $(x, t) \longmapsto f(x, t)$

77

une application définie sur $X \times [a, b[$.

tg (1) $\forall x \in X$, l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[a, b[$

(2) $\forall t \in [a, b[$, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur X .

(3) Il existe une application continue $g: [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$

valant l'intégrale impropre $\int_a^b g(t) dt$ converge

et $\forall x \in X \forall t \in [a, b[\quad |f(x, t)| \leq g(t)$

(3) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ l'intégrale impropre $\int_a^b f(x, t) dt$

converge normalement sur $x \in X$

Alors l'application $F: X \longrightarrow \mathbb{C}$
 $x \longmapsto \int_a^b f(x, t) dt$

est continue sur X .

A comparer au Théorème vu en 2^{ème} année

(1) et (2) $\rightarrow f$ continue sur $X \times [a, b[$

(3) convergence normale $\rightarrow$ convergence uniforme

V Théorème de dérivabilité sous le signe $\int$

Soit I un intervalle. Soit (T, dt) un espace mesurable muni d'une mesure μ . Soit $f: I \times T \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(x, t) \mapsto f(x, t)$$

une application définie sur $I \times T$

tg 1) $\forall x \in I$, l'application partielle

$$f(x, \cdot) : T \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto f(x, t) \text{ est intégrable}$$

2) f admet une dérivée partielle par rapport à x , $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur $I \times T$.

3) Il existe $g \in \mathcal{L}^1(T, \mu, \mathbb{R})$

tg $\forall x \in I, \forall t \in T \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq g(t)$

Alors

a) $\forall x \in I$, l'application $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est mesurable et intégrable sur T .

b) l'application $F : I \longrightarrow \mathbb{C}$

$$x \longmapsto \int_T f(x, t) d\mu(t)$$

est dérivable de dérivée

$$F'(x) = \int_T \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) d\mu(t)$$

Rappel Caractérisation de limite d'applications par des suites

Soit X un espace métrique. Soit $x \in X$

Soit $\varphi: X \setminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application définie (au moins) sur $X \setminus \{x\}$.

Soit $l \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{\substack{u \rightarrow x \\ u \neq x}} \varphi(u) = l \quad \text{ssi pour toute suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

d'éléments de $X \setminus \{x\}$ convergent vers x , la suite complexe

$\varphi(x_n)$ converge vers l .

Preuve: Soit $x \in I$ fixé quelconque.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $I \setminus \{x\}$

~~on suppose~~

Considérons le taux de variation

$$\frac{F(x_n) - F(x)}{x_n - x} = \int_T \frac{f(x_n, t) - f(x, t)}{x_n - x} dy(t)$$

D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à l'application partielle $f(\cdot, t)$ sur le segment d'extrémités x et x_n

c.à.d. $[x, x_n]$ si $x < x_n$, $[x_n, x]$ si $x > x_n$

$$|b(x_n, t) - b(x, t)| \leq |x_n - x| \sup_{u \in I} \left| \frac{\partial b}{\partial x}(u, t) \right|$$

$$\forall u \in I \quad \left| \frac{\partial b}{\partial x}(u, t) \right| \leq g(t)$$

donc

$$\left| \frac{b(x_n, t) - b(x, t)}{x_n - x} \right| \leq g(t)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b(x_n, t) - b(x, t)}{x_n - x} = \frac{\partial b}{\partial x}(x, t)$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée.

On obtient que l'application

$$t \mapsto \frac{\partial b}{\partial x}(x, t) \in L^1(T, \mu, \mathbb{R}) \text{ c.à.d. a)}$$

et que la suite $\frac{F(x_n) - F(x)}{x_n - x}$ converge vers $\int_T \frac{\partial b}{\partial x}(x, t) d\mu(t)$

donc d'après la caractérisation de la limite d'applications par des suites

$$\lim_{\substack{u \rightarrow x \\ u \neq x}} \frac{F(u) - F(x)}{u - x} = \int_T \frac{\partial b}{\partial x}(x, t) d\mu(t) \quad \square$$

Remarque on savait déjà que la dérivée d'une application est mesurable. On vient de refaire la démonstration de cette œuvre

Cas particulier $(T, dt) = (N, P(N))$

81

et μ est la mesure de dénombrement sur N

Le Théorème de dérivation sous le signe $\int$ devient

th de dérivation de la somme d'une série d'applications

Soit I un intervalle

Soit $(f_n)_{n \in N} : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une suite d'applications
définies sur I telle que

- 1) $\forall x \in I$ la série $\sum f_n(x)$ converge (absolument) ^{"inutile"}
- 2) $\forall n \in N$ f_n est dérivable sur I
- 3) Il existe une suite g_n de reals positifs
tq $\forall x \in I, \forall n \in N \quad |f'_n(x)| \leq g_n$
et $\sum g_n$ converge

c à d la série des dérivées $\sum f'_n$ converge normalement
sur I alors ^{"uniformement"}

- a) $\forall x \in I$, la série $\sum f'_n(x)$ converge (absolument)
- b) La somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est dérivable sur I
de dérivée $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$.

82

Cas particulier $T = [a, b[$ on traduit mesurable $\leadsto$ continue
intégrable $\leadsto \int_a^b$ convergence absolument

Le théorème de dérivation sous $\int$
implique donc

Le théorème de dérivation sous $\int$ pour les intégrales
généralisées ouvrant

th Soit I un intervalle

Soit $f: I \times [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$
 $(x, t) \longmapsto f(x, t)$ une application
définie sur $I \times [a, b[$ telle que

(1) $\forall x \in I$, l'application partielle

$t \longmapsto f(x, t)$ est continue sur $[a, b[$

et $\int_a^b f(x, t) dt$ converge absolument

(2) f admet une dérivée partielle par rapport

à x , $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur $I \times [a, b[$

tel que $\forall x \in I$, l'application $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$
est continue sur $[a, b[$

(3) Il existe une application $g: [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$
continue sur $[a, b[$

tel que l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) dt$ converge

et $\forall x \in I, \forall t \in [a, b[\quad \left| \frac{\partial b}{\partial x}(x, t) \right| \leq g(t)$

③ $\overset{\text{deb}}{\iff} \int_a^b \frac{\partial b}{\partial x}(x, t) dt$ converge normalement sur $x \in I$

Alors a) $\forall x \in I \quad \int_a^b \left| \frac{\partial b}{\partial x}(x, t) \right| dt$ converge absolument

b) l'application $F(x) = \int_a^b b(x, t) dt$

est dérivable sur I de dérivée

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial b}{\partial x}(x, t) dt$$

Et à comparer avec celui vu en 2^{ème} année.