

Intégrale de Lebesgue d'une application positive

I Intégrale d'une application simple

Convention $0 \times +\infty = 0$

Soit μ une mesure sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$

Proposition Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ des réels positifs pas forcément distincts. Soit $A_1, \dots, A_m$ une partition de X (c.a.d. $X = \bigcup_{i=1}^m A_i$ et les A_i sont deux à deux disjointes) avec $A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $1 \leq i \leq m$

Alors la somme $\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i)$ ne dépend que

de l'application simple $s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}$.

Preuve Soit $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}^+$ et $B_1, \dots, B_n$ une autre partition de X ou les $B_j \in \mathcal{A}$

Montrons que si $\sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^n \beta_j \chi_{B_j}$

alors $\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^n \beta_j \mu(B_j)$

$$A_i = A_i \cap X = A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^n B_j \right) = \bigcup_{j=1}^n (A_i \cap B_j)$$

Comme les B_j sont deux à deux disjointes,

$$\mu(A_i) = \sum_{j=1}^n \mu(A_i \cap B_j)$$

donc

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j)$$

Si $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ Soit $x \in A_i \cap B_j$

$$\alpha_i = \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{A_k} \right)(x) = \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \chi_{B_j} \right)(x) = \beta_j$$

donc $\alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \beta_j \mu(B_j \cap A_i)$

Si $A_i \cap B_j = \emptyset$ on a aussi

$$\alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = 0 = \beta_j \mu(B_j \cap A_i)$$

En échangeant les rôles de A et B, i et j, m et n, α et β

$$\sum_{j=1}^n \beta_j \mu(B_j) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}} \beta_j \mu(B_j \cap A_i)$$

donc $\forall \substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n} \quad \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \beta_j \mu(B_j \cap A_i)$

donc

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}} \beta_j \mu(B_j \cap A_i)$$

||

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i)$$

$$\sum_{j=1}^n \beta_j \mu(B_j)$$

||

□

d'où la

Définition Soit $\nu: X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application simple

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}_+^+$

et soit $A_1, \dots, A_m$ une partition de X

$$\text{tg } \nu = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}$$

On appelle intégrale de ν par rapport à μ ,

l'élément de $[0, +\infty]$, notée

$$\int_X \nu \, d\mu = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i)$$

Propriétés 1) Soient ν_1 et ν_2 deux applications simples
alors $\nu_1 + \nu_2$ est simple

$$\text{et on a } \int_X (\nu_1 + \nu_2) \, d\mu = \int_X \nu_1 \, d\mu + \int_X \nu_2 \, d\mu$$

Preuve

$$\nu_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i} \quad \text{ou } \alpha_i \in \mathbb{R}_+$$

les A_i forment une partition de X

$$\nu_2 = \sum_{j=1}^n \beta_j \chi_{B_j} \quad \text{ou } \beta_j \in \mathbb{R}_+$$

les B_j forment une partition de X

$$\int_X \nu_1 \, d\mu = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i,j} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j)$$

on a vu

49

De même par symétrie $\int_X \alpha_2 d\mu = \sum_{i,j} \beta_j \mu(B_j \cap A_i)$

donc $\int_X \alpha_1 d\mu + \int_X \alpha_2 d\mu = \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \mu(B_j \cap A_i)$

Les $(A_i \cap B_j)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ forment une partition de X et appartiennent à $\mathcal{A}$.

Soit $x \in A_i \cap B_j$

$(\alpha_1 + \alpha_2)(x) = \alpha_i + \beta_j$ donc $\alpha_1 + \alpha_2 = \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{A_i \cap B_j}$

donc $\int_X (\alpha_1 + \alpha_2) d\mu = \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j)$ $\square$

2) Soit α une application simple. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Alors $\alpha \alpha$ est simple et $\int_X \alpha \alpha d\mu = \alpha \int_X \alpha d\mu$

preuve $\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}$ donc $\alpha \int_X \alpha d\mu = \alpha \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i)$

donc $\alpha \alpha = \sum_{i=1}^m \alpha \alpha_i \chi_{A_i}$ donc $\int_X \alpha \alpha d\mu = \sum_{i=1}^m \alpha \alpha_i \mu(A_i)$

3) Si $\alpha_1 \leq \alpha_2$ alors $\int \alpha_1 d\mu \leq \int \alpha_2 d\mu$

preuve

$$D_2 = D_1 + D_2 - D_1$$

Comme $D_1 \leq D_2$ $D_2 - D_1$ est positive,
mesurable et ne prend qu'un nbre fini de
valeurs donc $D_2 - D_1$ est simple

d'après 1)

$$\int D_2 d\mu = \int D_1 d\mu + \underbrace{\int (D_2 - D_1) d\mu}_{\substack{\uparrow \\ [0, +\infty]}}$$

□

II Intégrale d'une application positive

définition

Soit $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une application mesurable à
valeurs positives

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int \phi d\mu \mid \phi \text{ simple et } \phi \leq f \right\}$$

Remarque: Si f est simple, d'après la Propriété 3)

$$\sup \left\{ \int \phi d\mu \mid \phi \text{ simple et } \phi \leq f \right\} \underset{\text{donc égal à}}{\leq} \int f d\mu$$

définie au I

donc cette nouvelle définition d'intégrale généralise
bien celle vue au I

fin cours Vendredi 27 Octobre 2006

Propriété 1) Si $b_1 \leq b_2$ alors $\int b_1 d\mu \leq \int b_2 d\mu$

preuve Soit α simple tq $\alpha \leq b_1$ donc $\alpha \leq b_2$
comme $\sup$ est un majorant

$$\int \alpha d\mu \leq \sup \left\{ \int \alpha d\mu / \alpha \text{ simple } \alpha \leq b_2 \right\}$$

$$\int b_2 d\mu$$

Comme $\sup$ = plus petit des majorants

$$\sup \left\{ \int \alpha d\mu / \alpha \text{ simple } \alpha \leq b_1 \right\} \leq \int b_2 d\mu$$

$$\int b_1 d\mu$$

$$2) \text{ Si } \alpha \in \mathbb{R}^+ \int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$$

Preuve $\int 0 d\mu = \int_{\text{d'après rem.}} 0 d\mu \stackrel{\text{défini au 1}^\circ}{=} 0 \times \mu(X) = 0$

donc si $\alpha = 0$ l'égalité est vraie

cas $\alpha > 0$ Soit α simple tq $\alpha \leq f$

$\alpha \alpha$ est simple et $\alpha \alpha \leq \alpha f$ donc

$$\alpha \int \alpha d\mu \stackrel{\text{on au I}}{=} \int \alpha \alpha d\mu \leq \int \alpha f d\mu \text{ car } \sup \text{ est un majorant ou d'après 1}^\circ$$

donc
$$\int 0 \, d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \int \alpha f \, d\mu$$

comme $\inf =$ plus petit des majorants

$$\int f \, d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \int \alpha f \, d\mu$$

on a donc montré
$$\alpha \int f \, d\mu \leq \int \alpha f \, d\mu$$

en remplaçant α par $\frac{1}{\alpha}$ et f par αf

on a donc
$$\frac{1}{\alpha} \int \alpha f \, d\mu \leq \int \frac{1}{\alpha} \alpha f \, d\mu$$

donc
$$\int \alpha f \, d\mu \leq \alpha \int f \, d\mu \text{ d'où l'égalité } \square$$

Aller page 53-55.

~~l'additivité~~

III Théorème de convergence monotone

Soit μ une mesure positive sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$

Soient $(f_n): X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une suite croissante

d'applications mesurables à valeurs positives / éventuellement infinies

alors $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ est une application

mesurable positive de X dans $\overline{\mathbb{R}}$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu \in [0, +\infty]$$

existe et est égale à

Arithmétique dans $[0, +\infty]$

Propriété 1) Soient a_n et b_n deux suites croissantes

d'éléments de $[0, +\infty]$ alors $\lim a_n b_n = \lim a_n \lim b_n$

preuve: Cas $\lim a_n = 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n b_n = 0$

donc $\lim a_n b_n = 0$

Cas $\lim b_n = 0$ par symétrie

Cas $\lim a_n > 0$ ou $\lim b_n > 0$

$\lim a_n b_n = \lim a_n \lim b_n$ car on ne peut pas avoir la forme indéterminée $0 \times +\infty$ ou $+\infty \times 0$

Contre-exemple $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$

de pas croissante!

$b_n = n \rightarrow +\infty$

$a_n b_n = \sqrt{n} \rightarrow +\infty \neq 0 = 0 \times +\infty$

2) Soient f et $g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ applications

mesurables à valeurs positives alors, le

produit $f g$ est une applications mesurables : $X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$
à valeurs positives

preuve: D'après Th chap 1 Section VI,

il existe une suite croissante d'applications simples a_n tq $\lim a_n(x) = f(x)$
 b_n $\lim b_n(x) = g(x)$

d'après 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n)(x) = f(x) g(x)$

$a_n b_n$ produit d'applications mesurables de X dans $\mathbb{R}$
est mesurable donc $f g$ limite d'applications

mesurables : $X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est mesurable

3) Soient f et $g : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ deux applications
^{à valeurs positives}
 mesurables ne prenant jamais la valeur $+\infty$ en même temps
 alors la différence $f-g : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est une
 application mesurable

preuve

$$f(x) = \lim a_n(x) \nearrow$$

$$g(x) = \lim b_n(x) \nearrow$$

$a_n(x) - b_n(x)$ converge vers $f(x) - g(x)$

car on n'a pas la forme indéterminée $+\infty - (+\infty)$

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit μ une mesure

Soit $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une application mesurable
à valeurs positives

Soit $E \in \mathcal{A}$ alors $\chi_E: X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application
mesurable à valeurs positives donc le produit

$f \chi_E$ d'après Proposition 2) est une application
mesurable de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ à valeurs positives.

$$\text{d'eff} \quad \int_E f \, d\mu = \int_X f \chi_E \, d\mu$$

Propriété Si $f \geq 0$ et $A \subset B \in \mathcal{A}$

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad \int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$$

$$\text{preuve } \forall x \in X \quad f \chi_A(x) \leq f \chi_B(x) \quad \text{donc} \quad \int_X f \chi_A \, d\mu \leq \int_X f \chi_B \, d\mu$$

démo du th de convergence monotone

$f = \lim b_n: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ limite d'applications mesurables
est mesurable

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n \leq b_{n+1} \text{ donc } \int b_n d\mu \leq \int b_{n+1} d\mu$$

donc la suite $\int b_n d\mu$ est croissante donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int b_n d\mu \in \overline{\mathbb{R}}$
existe

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n \leq f \text{ donc } \int b_n d\mu \leq \int f d\mu$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int b_n d\mu \leq \int f d\mu$$

$$\text{Il reste à montrer que } \int f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int b_n d\mu$$

c.à.d. Soit ρ une application simple tq $\rho \leq f$.

il faut et il suffit de montrer que $\int \rho d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int b_n d\mu$
c.à.d. $\rho(x) \leq f(x)$ ou $\rho(x) = 0$ pour tout $x \in X$

$$\text{Soit } E_n = \{x \in X \text{ tq } \rho(x) \leq b_n(x)\}$$

b_n et ρ est mesurable de X dans $\mathbb{R}$

$\forall x \in X$ donc $\rho(x)$ est ~~est~~ ~~mesurable~~

b_n et $\rho: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sont deux applications
à valeurs positives
mesurables qui ne prennent pas la valeur $+\infty$

donc $b_n - \rho: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable

$$\text{donc } E_n = (b_n - \rho)^{-1}([0, +\infty]) \in \mathcal{A} \text{ car } [0, +\infty] \text{ fermé de } \overline{\mathbb{R}}$$

Exo Montrer directement que

$E_n \in \mathcal{C}$ sans utiliser le lemme fondamental

d'approximation et le Th limite d'applications mesurables
est mesurable

$$E_n = \mathcal{B}_n^{-1}(\{+\infty\}) \cup \left(\mathcal{B}_n^{-1} \left| \begin{array}{c} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{B}_n^{-1}(\{+\infty\})^c \end{array} \right. \right)^{-1}(\mathbb{R})$$

$$E_m \subset E_{m+1} \text{ car } b_m \leq b_{m+1}$$

$$X = \bigcup E_m$$

en effet soit $x \in X$ $\alpha(x) < \beta(x) = \lim b_m(x)$

donc Soit $\varepsilon = \beta(x) - \alpha(x) > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall m \geq N$

$$b_m(x) \geq \beta(x) - \varepsilon = \alpha(x) \quad x \in E_m$$

$\forall x \in E_m \quad \alpha(x) \leq b_m(x)$ donc

$$\int_{E_m} \alpha \, d\mu \leq \int_{E_m} b_m \, d\mu \leq \int_X b_m \, d\mu$$

Montrons que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{E_m} \alpha \, d\mu = \int_X \alpha \, d\mu$

$$\alpha = \sum \alpha_i \psi_{A_i}$$

$$\int_{E_m} \alpha \, d\mu = \int_X \alpha \psi_{E_m} \, d\mu$$

$$\alpha \psi_{E_m} = \sum \alpha_i \psi_{A_i} \psi_{E_m} = \sum \alpha_i \psi_{A_i \cap E_m} + 0 \psi_{E_m^c}$$

Propriété $\psi_{A \cap B} = \psi_A \psi_B$

donc $\int_X \alpha \psi_{E_m} \, d\mu = \sum \alpha_i \mu(A_i \cap E_m) + 0 \mu(E_m^c)$
 $\downarrow$
 $\mu(A_i)$ qd $m \rightarrow +\infty$

car
$$\left. \begin{aligned} U(A_1 \cap E_n) &= A_1 \\ A_1 \cap E_n &\subset A_1 \cap E_{n+1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{d'après 4) Propriété des mesures} \\ &\text{la suite croissante } \mu(A_1 \cap E_n) \\ &\text{converge vers } \mu(A_1) \text{ quand } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

donc
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \alpha \chi_{E_n} d\mu = \sum \alpha_i \mu(A_i) = \int_X \alpha d\mu$$

d'où on a montré si α simple et $\alpha < f$

$$\int_X \alpha d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int b_n d\mu$$

Cas général $\alpha < f$ α simple

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ $(1-\varepsilon)\alpha$ est simple

et vérifie $(1-\varepsilon)\alpha < \alpha < f$ si $\alpha(x) > 0$
ou $(1-\varepsilon)\alpha(x) = 0$

on a donc démontré que

$$(1-\varepsilon) \int_X \alpha d\mu = \int_X (1-\varepsilon)\alpha d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int b_n d\mu$$

en faisant tendre ε vers 0 on a

$$\int_X \alpha d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int b_n d\mu$$

□

IV Conséquences du théorème de convergence monotone

Remarque: pour l'instant, on n'a pas démontré l'additivité de l'intégrale

Propriété Soient f et $g: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ deux applications mesurables à valeurs positives

alors $f+g: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable à valeurs positives

$$\text{et on a } \int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

preuve

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(x) \nearrow \text{ simple}$$

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(x) \nearrow \text{ simple}$$

$$a_n(x) + b_n(x) \text{ converge vers } f(x) + g(x)$$

car on n'a pas la forme indéterminée $+\infty + (-\infty)$
 $-\infty + (+\infty)$

d'après le th de convergence monotone

$$f+g: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ est mesurable à valeurs positives}$$

et on a en appliquant 3 fois le Th de convergence monotone

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int a_n d\mu = \int f d\mu$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int b_n d\mu = \int g d\mu$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int (a_n + b_n) d\mu = \int (f+g) d\mu$$

||

$$\int a_n d\mu + \int b_n d\mu \quad \text{d'après additivité de } \int \text{ des applications simples}$$

th de Beppo LEVI

Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

mesurables à valeurs positives

alors l'application $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ est mesurable à valeurs positives

et on a

$$\int \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int b_n d\mu$$

fin du cours Vendredi 16 Novembre 2006

Revue

Soit $S_n := \sum_{k=0}^n b_k$

"additivité de l'intégrale"

D'après la propriété précédente, S_n est mesurable à valeurs

positive et on a $\int \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) d\mu = \sum_{k=0}^n \int b_k d\mu$.

Comme les b_k sont positives, la suite S_n est croissante

donc d'après le théorème de convergence monotone appliqué à S_n

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n b_k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ est mesurable

et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int S_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n d\mu = \int \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) d\mu$$

62

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int b_k d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int b_n d\mu \right)$$

Lemme de Fatou

Soient $f_n : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ une suite d'applications mesurables à valeurs positives

alors $\liminf f_n : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est mesurable à valeurs positives et on a

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

preuve: Soit $g_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x)$

Comme les f_k $k \geq n$ sont mesurables, on a vu chap 1. IV que g_n est mesurable

g_n est une suite croissante d'applications mesurables $X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ à valeurs positives donc d'après le théorème de convergence monotone

$\liminf f_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n$ est mesurable et on a

$$\int \liminf f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n d\mu$$

$$\forall k \geq n \quad g_n \leq f_k \quad \text{donc} \quad \int g_n d\mu \leq \int f_k d\mu$$

comme inf plus grand des mineurs

$$\int g_n d\mu \leq \inf_{k \geq n} \int f_k d\mu$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n d\mu < \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} \int b_k d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \liminf \int b_n$$

Exemple Considérons $X = \mathbb{R}$ muni des Boreliens et de la mesure de Lebesgue

Soit $b_n = \chi_{[n, n+1[}$

$[n, n+1[$ est un borélien donc b_n est mesurable

$b_n(x)$ converge vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$

$$\int b_n d\mu = \int \chi_{[n, n+1[} d\mu = 1 \times \mu([n, n+1[) = 1$$

car $\chi_{[n, n+1[}$ est simple

on a donc

$$\int \lim b_n d\mu = 0 < 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int b_n d\mu$$

on n'a pas égalité dans le lemme de Fatou contrairement au th de convergence de monotone.

Ici, on ne peut pas appliquer le th de convergence monotone car la suite b_n n'est pas croissante.