chap 1

Théorie de la mesure

I σ - algèbres

Soit X un ensemble

$\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties de X

déf On appelle σ - algèbre sur X, toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant

1) $\mathcal{A}$ est non vide

2) Si $A \in \mathcal{A}$ alors le complémentaire de A dans X, $A^c \in \mathcal{A}$

"stable par passage au complémentaire."

3) Si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{A}$

"stable par réunion dénombrable"

plus généralement Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'élts de A tel que l'ensemble I est dénombrable

alors la réunion $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$

Soit $\mathcal{A}$ une σ-algebre

. $\mathcal{A}$ Stable par reunion denombrable $\Rightarrow \mathcal{A}$ stable par reunion fini

Preuve Soient $B_1, \quad , B_q$ une suite finie d'elements de $\mathcal{A}$. Posons $A_n = \begin{cases} B_n & \text{si } n \leq q \\ B_q & \text{si } n \geqslant q \end{cases}$

i.c la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à partir de $n = q$

alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = B_1 \cup \quad \cup B_q \in \mathcal{A}$

Propriete $\mathcal{A}$ est stable par intersection fini ou denombrable

preuve

Soit $A_1, \quad , A_n, \ldots$ une suite d'elements de $\mathcal{A}$

Comme $\mathcal{A}$ est stable par passage au complementaire

$A_1^c, \quad , A_n^c, \ldots$ est une suite d'elements de A

donc comme $\mathcal{A}$ est stable par reunion denombrable

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \in \mathcal{A}$.

$\| $

$\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c$. Comme $\mathcal{A}$ est stable par passage au complementaire, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

m̂ demo pour l'intersection finie

Propriété $\emptyset$ et $X \in \mathcal{A}$

preuve $\mathcal{A}$ est non vide donc il existe $A \in \mathcal{A}$

Comme $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire,

$A^c \in \mathcal{A}$.

Comme $\mathcal{A}$ est stable par réunion finie

$\Omega = A \cup A^c \in \mathcal{A}$

Comme $\mathcal{A}$ est stable par passage au complément

$\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{A}$

def Un ensemble X muni d'une σ-algèbre $\mathcal{A}$ est appelé espace mesurable

Exemple i) $\{\emptyset, X\}$ est une σ-algèbre dite grossière

ii) $\mathcal{P}(X)$ est une σ-algèbre dite discrète

iii) $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ est une σ-algèbre c'est la plus petite σ-algèbre contenant la partie A.

iv) Soit X un ensemble muni d'une σ-algèbre $\mathcal{A}$. Soit $A \subset X$. Alors $A \cap \mathcal{A} := \{A \cap B \text{ telle que } B \in \mathcal{A}\}$ est une σ-algèbre sur A appelée σ-algèbre trace

II applications mesurables

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable

Soit $(Y, \mathcal{T})$ un espace topologique

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application

def f est mesurable si pour tout ouvert V de Y,

$f^{-1}(V) \in$ σ-algebre $\mathcal{A}$

Proprietes Rudin 1.8 theorem

1) Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application mesurable
Soit $g : Y \longrightarrow Z$ une application continue
alors $g \circ f : X \longrightarrow Z$ est mesurable

2) Soit X un espace mesurable.
Considerons $\mathbb{R}$ muni de sa topologique usuelle
Soient $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications mesurables alors

l'application notee (u,v) : $\begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \longmapsto (u(x), v(x)) \end{array}$ est mesurable

Demonstration 1) est evident
2) Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
On a vu que tout ouvert O de $\mathbb{R}^2$ est reunion d'une famille denombrable de boule ouvertes

donc d'une réunion fini ou dénombrable de boules ouvertes

donc $O = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \text{ou fini}}} B(a_n, \varepsilon_n)$

Considérons la norme $\| \ \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$

$$\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$$

Pour cette norme, la boule $B(a_n, \varepsilon_n)$ est le rectangle
$]x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon[\times]y_n - \varepsilon, y_n + \varepsilon[$ où $a_n = (x_n, y_n)$

donc $O = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \text{ou fini}}}]x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon[\times]y_n - \varepsilon, y_n + \varepsilon[$

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$x \longmapsto (u(x), v(x))$

$$f^{-1}(O) = f^{-1}\Big(\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \text{ou fini}}}]x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon[\times]y_n - \varepsilon, y_n + \varepsilon[\Big)$$

$$= \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \text{ou fini}}} f^{-1}\big(]x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon[\times]y_n - \varepsilon, y_n + \varepsilon[\big)$$

Rappel $f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$

On doit montrer que $f^{-1}(O) \in \sigma$-algèbre $\mathcal{A}$ sur X

Comme $\mathcal{A}$ est stable par réunion fini ou dénombrable, il suffit de montrer que

$$f^{-1}\big(]x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon[\times]y_n - \varepsilon, y_n + \varepsilon[\big) \in \mathcal{A}$$

$$f^{-1}\left( ]x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon[\times]y_n - \varepsilon, y_n + \varepsilon[\right)$$

$$= \underbrace{u^{-1}\left( ]x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon[\right)}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{v^{-1}\left( ]y_n - \varepsilon, y_n + \varepsilon[\right)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

car u mesurable car v mesurable

Comme $\mathcal{A}$ stable par intersection fini

Corollaire du 2) et du 1)

1 - Si u et v sont des applications mesurables de X dans $\mathbb{R}$ alors $u + iv$ est mesurable de X dans $\mathbb{C}$
$u + v$, uv mesurable de X dans $\mathbb{R}$

$$X \xrightarrow{(u,v)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$$

mesurable par 2) $\qquad$ composée donc mesurable d'après 1

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow[+ \text{ ou } \times]{\text{cont}}$$

$\mathbb{C}$ est muni de la topologie tel que la bijection $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ et sa réciproque soient continues

fin du cours Vendredi 29 Septembre 2006

2 Si $u + iv$ est mesurable alors u, v et $|u + iv|$ sont mesurable

$$X \xrightarrow{u+iv} \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{projection } 1} \mathbb{R}$$

$$\xrightarrow{\text{projection } 2} \mathbb{R}$$

$$\xrightarrow{\text{module}} \mathbb{R}$$

III Les boréliens

Proposition

Soit $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille de σ-algèbres sur X

alors l'intersection des σ-algèbres $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ est une

σ-algèbre sur X

preuve de 1) $\forall i \in I$, $X \in \mathcal{A}_i$ donc $X \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$

2) Si $A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \Longrightarrow \forall i \in I, A \in \mathcal{A}_i$ comme $\mathcal{A}_i$

stable par passage au complémentaire

3) Si $A_1, A_2, \quad , A_n, \dots$ est une suite d'éléments de $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$

alors $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall i \in I \quad A_n \in \mathcal{A}_i$

Comme $\mathcal{A}_i$ stable par réunion dénombrable, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{A}_i$

Ceci est vrai pour tout $i \in I$, donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$

Corollaire

Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ c à d soit $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de X. L'intersection de toutes les σ-algèbres contenant $\mathcal{B}$ est une σ-algèbre notée $\sigma(\mathcal{B})$.

C'est la plus petite σ-algèbre sur X contenant $\mathcal{B}$

def On l'appelle σ-algèbre engendrée par $\mathcal{B}$.

Preuve

Soit $I = \{ \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ tq $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre

sur X et $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \}$

I est non vide car $\mathcal{P}(X)$ σ-algèbre discrète $\in I$

Soit $\sigma(\mathcal{B}) := \bigcap_{\mathcal{A} \in I} \mathcal{A}$

d'après Proposition est une σ-algèbre sur X.

$\sigma(\mathcal{B})$ contient $\mathcal{B}$ car $\forall \mathcal{A} \in I$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$

Démontrons que c'est la plus petite σ-algèbre contenant $\mathcal{B}$

Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre sur X contenant $\mathcal{B}$

donc $\mathcal{A} \in I$ donc $\sigma(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$ $\square$

ex : $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ est la σ-algèbre engendrée par $\{A\}$

def Soit $(X, \mathcal{E})$ un espace topologique

On appelle σ-algèbre des boréliens, la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{E}$, l'ensemble des ouverts de X.

Un borélien est un élément de cette σ-algèbre

exemples de Boréliens

les ouverts sont des boréliens

les fermés ($\overset{def}{=}$ complémentaires d'ouverts) sont des boréliens

les intersections dénombrables d'ouverts sont des boréliens

les réunions dénombrables de fermés aussi

on prendra souvent comme espace topologique $X = \mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle.

On montre difficilement qu'il existe des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des boréliens.

Propriete

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable

Soit Y un espace topologique

Soit $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow Y$ une application mesurable

alors $\forall$ F fermee de Y ; son image reciproque $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$

preuve Par definition F est un fermee de Y

ssi son complementaire dans Y, F^c est un ouvert de Y

Comme f mesurable, $f^{-1}(F)^c = f^{-1}(F^c) \in \mathcal{A}$

Comme $\mathcal{A}$ stable par passage au complementaire

son complementaire $f^{-1}(F) = f^{-1}(F^c)^c \in \mathcal{A}$ $\square$

Remarque En fait, on peut montrer plus :

Rudin th 1.12 chapitre 1

f est mesurable $\Longrightarrow$ $\forall$ B borelien de Y

son image reciproque $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

Propriété évidente

Soient X et Y deux espaces topologiques. $A \subset X$

Soit $f : \underset{A}{X} \longrightarrow Y$ une application continue sur X

alors f est mesurable pour la σ-algèbre des boréliens sur X

$\cap A$ σ-algèbre trace

IV Topologie usuelle de $\overline{\mathbb{R}}$

On appele droite numerique achevée et on note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ où $-\infty$ et $+\infty$ sont deux nouveaux elements distincts n'apartenant pas à $\mathbb{R}$

La relation d'ordre total $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ s'etend sur $\overline{\mathbb{R}}$ en posant $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \quad -\infty \leqslant x \leqslant +\infty$

Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne sup et une borne inf qui $\in$ a $\overline{\mathbb{R}}$

Soit O une partie de $\overline{\mathbb{R}}$

def O est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ pour la topologie usuelle si
- $O \cap \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle
- si $+\infty \in O$, $\exists\, a \in \mathbb{R}$ tq $]a, +\infty] \subset O$
- si $-\infty \in O$, $\exists\, b \in \mathbb{R}$ tq $[-\infty, b[\subset O$.

equivaut à $\forall x \in O$

si $x \in \mathbb{R}$, $\exists\, \varepsilon > 0$ tq $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset O$

si $x = +\infty$, $\exists\, a \in \mathbb{R}$ tq $]a, +\infty] \subset O$

si $x = -\infty$, $\exists\, b \in \mathbb{R}$ tq $]-\infty, b] \subset O$

Proposition Tout ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ est reunion denombrable d'intervalles ouverts $]a_n - \varepsilon_n, a_n + \varepsilon_n[$ et d'eventuellement une demi-droite $]a, +\infty]$

et une demi-droite $[-\infty, b[$

Preuve Soit O un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$

donc
$$O = O \cap \mathbb{R} \underset{\text{eventuellement}}{\cup}]a, +\infty] \cup [-\infty, b[$$

on a vu que (Corollaire fin du chap 0) tout ouvert de $\mathbb{R}$ est reunion denombrable de boules ouvertes $B(a_n, \varepsilon_n) =]a_n - \varepsilon_n, a_n + \varepsilon[$

donc
$$O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a_n - \varepsilon_n, a_n + \varepsilon_n[\underset{\text{eventuellement}}{\cup}]a, +\infty] \cup]-\infty, b[$$

Theorem Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ une application ($\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$)

f est mesurable ssi $\forall b \in \mathbb{R}$ $f^{-1}([-\infty, b[) \in \mathcal{A}$

ssi $\forall a \in \mathbb{R}$ $f^{-1}(]a, +\infty]) \in \mathcal{A}$

preuve $\Rightarrow$ On suppose que f est mesurable
comme $[-\infty, b[$ ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ donc $f^{-1}([-\infty, b[) \in \mathcal{A}$

$\Leftarrow$ On suppose que $\forall b \in \mathbb{R}$ $f^{-1}[-\infty, b[\in \mathcal{A}$

~~$]a, +\infty]^c \neq [-\infty, a]$~~

$[-\infty, b[^c = [b, +\infty]$

On se rappelle $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$

donc $f^{-1}([b, +\infty]) = f^{-1}([-\infty, b[)^c \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ stable par passage au complementaire

$$]a, +\infty] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [a + 1/n, +\infty]$$

donc $f^{-1}(]a, +\infty]) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} f^{-1}([a + 1/n, +\infty]) \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ stable par reunion denombrable

On rappelle que $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$

$$]a, b[\;=\;]a, +\infty] \cap [-\infty, b[$$

donc $f^{-1}(]a, b[) = f^{-1}(]a, +\infty]) \cap f^{-1}([-\infty, b[) \in \mathcal{A}$
car $\mathcal{A}$ stable par intersection finie

On se rappelle $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$

Soit O un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$

$$O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]a_n - \varepsilon_n, a_n + \varepsilon_n[\underset{\text{eventuellement}}{\cup}]a, +\infty[\cup]-\infty, b[$$

donc $f^{-1}(O) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(]a_n - \varepsilon_n, a_n + \varepsilon_n[) \underset{\text{eventuellement}}{\cup} f^{-1}(]a, +\infty]) \cup f^{-1}(]-\infty, b[)$
$\in \mathcal{A}$ $\square$

Remarque : Au cours de cette demonstration, on a demontré que la σ-algebre des boreliens sur $\overline{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$ est engendré par les demi-droites $[-\infty, b[$ où $b \in \mathbb{R}$
$]-\infty, b[$

(29 bis) ici

Theoreme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$
une suite d'applications mesurables
alors l'application $g = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est une application mesurable. De m̂ l'application $h = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est une application mesurable

Preuve : On va utiliser le Th précédent

et montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, $g^{-1}(]a,+\infty[) \in$ 6-algèbre $\mathcal{A}$ sur X

Montrons que $g^{-1}(]a,+\infty[) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]a,+\infty[)$

Soit $x \in g^{-1}(]a,+\infty[)$, $g(x) > a$

$g(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ sup plus petit des majorant
a plus petite que sup

donc a pas un majorant donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq
$a < f_{n_0}(x)$ donc $x \in f_{n_0}^{-1}]a,+\infty[\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]a,+\infty[)$

Reciproquement Soit $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]a,+\infty[)$

donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $f_{n_0}(x) > a$
sup est un majorant donc $f_{n_0}(x) \leq g(x)$ } $g(x) > a$

donc $x \in g^{-1}(]a,+\infty[)$

donc on a bien demontrer que $g^{-1}(]a,+\infty[) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]a,+\infty[)$

Comme f_n est mesurable, $f_n^{-1}(]a,+\infty[) \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ stable par reunion denombrable

donc $g^{-1}(]a,+\infty[) \in \mathcal{A}$ $\square$

pour h m̂ demos avec $h^{-1}([-\infty, b[)$

fin Cours Vendredi 6 Octobre 2006

Corollaire

Soient f et $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ deux applications mesurables alors

$$\max(f,g)\ ,\ \min(f,g)\ ,\ f_+ = \max(f,0)$$

$$f_- = -\min(f,0)\ : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ sont mesurable}$$

Preuve

- La suite f_n définie $\quad f_n = \begin{cases} f & \text{si } n = 0 \\ g & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

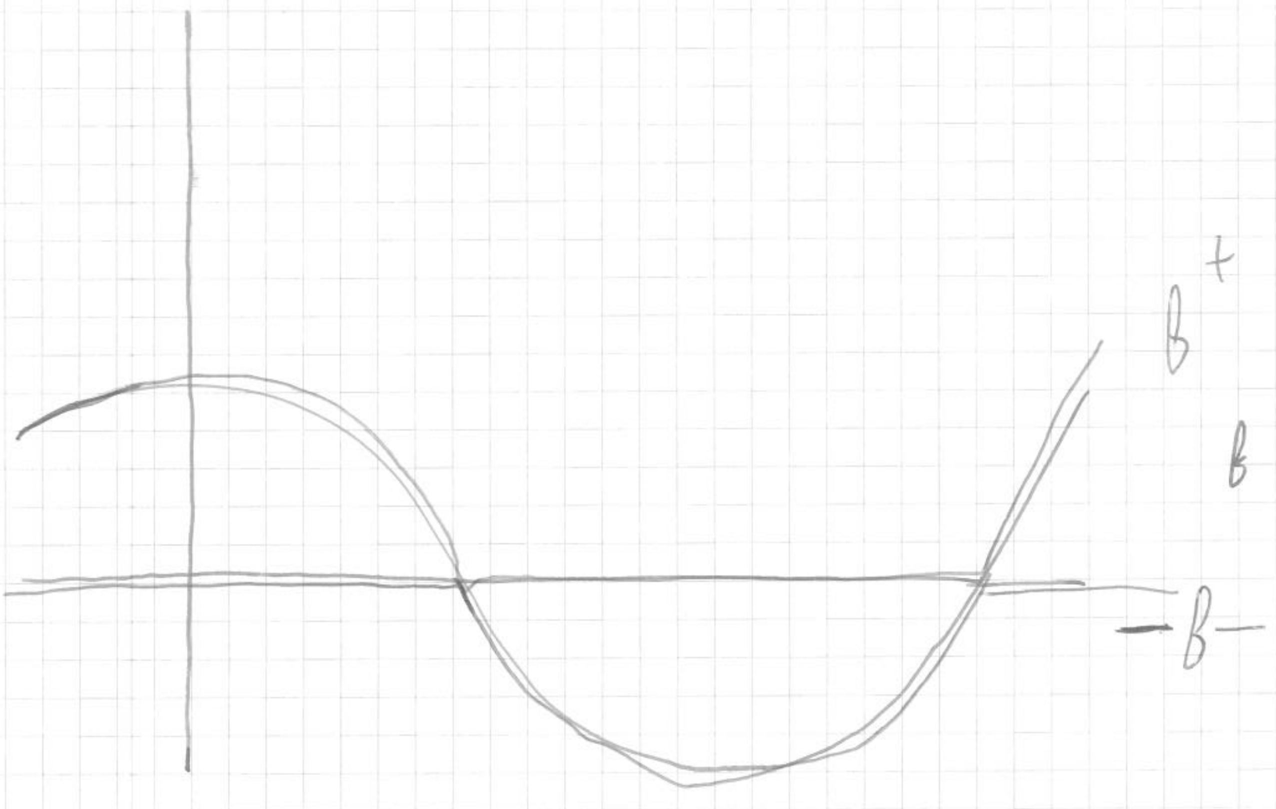
  est une suite d'applications mesurable

  donc

  $$\sup f_n = \max(f,g) \text{ est mesurable}$$

- L'application constante $\begin{array}{l} X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x \longmapsto 0 \end{array}$ est mesurable

  donc d'après ce qui précède $\max(f,0)$ est mesurable



31, 32, 33 inutile Aller page 34

V Valeur d'adhérence d'une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$

Soient u_n une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$
et $l \in \overline{\mathbb{R}}$

déf On dit que la suite u_n converge vers l

si quelque soit O ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ contenant l, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$

$u_n \in O$ $\quad \overset{l}{\times}$

$\iff \forall O$ ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ contenant l,

$\{ n \in \mathbb{N} \ / \ u_n \in O \}$ comprend tous les entiers naturels sauf un nombre fini

<u>Dans le cas $l \in \mathbb{R}$</u>

$\iff \forall \varepsilon > 0$ tous les $u_n \in \left] l-\varepsilon, l+\varepsilon \right[$ sauf pour un nombre fini de n

Si $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in \mathbb{R}$
on retrouve la déf usuelle d'une suite de réels convergeant vers l

Dans le cas $l = +\infty$

$\iff \forall a \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > a$ sauf pour un nbre fini de n

Si $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in \mathbb{R}$
on retrouve la déf usuelle de $\lim u_n = +\infty$

dernier cas $l = -\infty$

Propriété l est unique

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$

def On dit que la suite u_n

admet a comme valeur d'adherence

si $\forall O$ ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$, contenant a

$\{ n \in \mathbb{N} \; / \; u_n \in O \}$ est infini

$\Leftrightarrow$ quelque soit O ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ contenant a

$\forall N \in \mathbb{N}, \; \exists \, n \geqslant N \;$ tq $\; u_n \in O$

Dans le cas $a \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ il existe une infinite de $n \in \mathbb{N}$ tq $u_n \in \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$

Dans le cas $a = +\infty$

$\Leftrightarrow$

$\forall M \in \mathbb{R}$ il existe une infinite de $n \in \mathbb{N}$ tq $u_n > M$

cas particulier une suite de reels admet $+\infty$ comme valeur d'adherence ssi elle n'est pas majoree

exemple

$$u_{2n} = \left(1 + (-1)^n\right) n$$ admet comme valeurs d'adherence $\{0, +\infty\}$

donc a n'est pas forcement unique

thm a est valeur d'adherence de la suite u_n ssi il existe une sous suite de u_n qui converge vers a

preuve $\overline{\mathbb{R}}$ est un espace metrique ou en distinguant $a = +\infty$ et $a \in \mathbb{R}$

Soit u_n une suite d'elements de $\overline{\mathbb{R}}$ $\quad l \in \overline{\mathbb{R}}$

Theoreme

la suite u_n converge vers l

ssi l est l'unique valeur d'adherence

Theoreme de Bolzano - Weierstrass

Toute suite d'element de $\overline{\mathbb{R}}$ admet au moins une valeur d'adherence $\in \overline{\mathbb{R}}$

preuve

si $+\infty$ n'est pas une valeur d'adherence de u_n

$\exists\, M \in \mathbb{R}$ tq $\{n \in \mathbb{N}$ tq $u_n > M\}$ soit fini

donc $\exists\, M \in \mathbb{R}$ et $\exists\, N' \in \mathbb{N}$ tq $\forall\, n \geq N'$ $\quad u_n \leq M$

de même si $-\infty$ n'est pas une valeur d'adherence de u_n

$\exists\, m \in \mathbb{R}$ et $\exists\, N'' \in \mathbb{N}$ tq $\forall\, n \geq N''$ $\quad u_n \geq m$

donc à partir de $N = \max(N', N'')$, la suite u_n est une suite de reel borné donc d'après le Th de Bolzano - Weierstrass pour les suites de reelles admet au moins une valeur d'adherence $a \in \mathbb{R}$.

Soit x_n une suite d'elements de $\overline{\mathbb{R}}$

def On appelle limite superieure de la suite x_n, inferieure

notee $\overline{\lim} \sup_{\inf} x_n$

l'element de $\overline{\mathbb{R}}$ $\left(\inf_{n \geqslant 0} \sup_{k \geqslant n} x_k \right)$

$$\sup_{n \geqslant 0} \inf_{k \geqslant n} x_k$$

Remarque

Soit $X_n := \{ x_k \; / \; k \geqslant n \}$ et $a_n := \sup X_n \in \overline{\mathbb{R}}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ on a $X_{n+1} \subset X_n$

donc $\forall x \in X_n$ $x \leqslant a_n$ car sup est un majorant

en particulier $\forall x \in X_{n+1}$ $x \leqslant a_n$

donc $a_{n+1} \leqslant a_n$ car sup plus petit des majorants de X_{n+1}

donc la suite a_n est decroissante donc admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui est sa borne inferieure

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \inf_{n \geqslant 0} a_n$$

donc on a demontré que $\lim \sup x_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{k \geqslant n} x_k \right)$

Theorem La limite superieure d'une suite d'elements de $\overline{\mathbb{R}}$ est sa plus grande valeur d'adherence.

De même $\lim \inf x_n$ = plus petite des valeurs d'adherence

Theorem la suite x_n converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$

Corollaire ssi l est l'unique valeur d'adherence cf page 33

ssi $l = \limsup x_n = \liminf x_n$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurable $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

alors l'application $g = \limsup f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable

$h = \liminf f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

Preuve

D'apres le Theoreme $\forall n \in \mathbb{N}$,

l'application $g_n \overset{def}{:=} \sup_{k \geq n} f_k$ est mesurable

donc en appliquant à nouveau le theorem

l'application $g = \inf_{n \in \mathbb{N}} g_n$ est mesurable

Cas particulier du Corollaire

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

telle que $\forall x \in X \quad f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}$.

c à d f_n converge simplement vers f sur X

alors l'application $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable

preuve $\forall x \in X$, la suite $f_n(x)$ converge vers $f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$

donc $f(x) = \limsup f_n(x) = \liminf f_n(x)$

donc d'apres Corollaire precedent f est mesurable $\square$

VI Applications simples (= étagées)

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable

def Une application $s : X \longrightarrow \mathbb{R}$ à valeurs positives est dite simple ou etagé si • elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs • elle est mesurable

Propriétés Toute application s de la forme $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Psi_{A_i}$ où les α_i sont des reels positifs et les $A_i \in \mathcal{A}$ est simple

preuve 3) Comme $A_i \in \mathcal{A}$, l'application caracteristique Ψ_{A_i} est mesurable cf exo 2 Serie 2

on a vu que toute somme, tout produit d'applications mesurables est mesurable et qu'une application constante est mesurable donc s est mesurable

1) s est positif car les $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$

2) s prend un nombre fini de valeurs

valeurs de $s = s(X) \subset \{$somme finie de $\alpha_i\}$

$$= \left\{ \alpha_{i_1}, \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2}, \alpha_i \quad , \alpha_{i_1} + \quad + \alpha_{i_p}, \right\}$$

$$1 \leqslant i_1 < \quad < i_p \leqslant n$$

Proposition
Toute application simple s s'ecrit de maniere unique $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Psi_{A_i}$ où les α_i sont des reels positifs et les $A_i \in \mathcal{A}$ tous distincts

sont 2 à 2 disjoints tel que $X = A_1 \cup \quad \cup A_n$
(c à d les A_i forment une partition de X) et sont non vides

~~preuve Unicité Supposons que $s = \sum \alpha_i \chi_{A_i}$ avec les hypothèses~~

~~Soit $x \in X$. $\exists$ et il existe un entier i~~

~~compris~~

$$\{\alpha_1, \quad , \alpha_n\} = s(X) \text{ ens des valeurs prises par } s$$

$$A_i = \{x \in X \text{ tq } s(x) = \alpha_i\} = s^{-1}(\{\alpha_i\})$$

Si s est mesurable, comme le fermé $\{\alpha_i\} \in$ borelien de $\mathbb{R}$,
$s^{-1}(\{\alpha_i\}) \in \mathcal{A}$.

Lemme fondamental d'approximation fin Cours Vendredi 13 Octobre 2006
pas cours Vendredi 20 Octobre

Théorème Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une application
mesurable à valeurs positives (éventuellement infini)
Il existe une suite croissante $(s_n)_{n \geq 1}$ d'applications simples

convergent simplement vers f

c à d une suite d'applications simples

$$\forall x \in X \qquad 0 \leq s_1(x) \leq s_2(x) \leq \quad \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$$

$$\text{et } \lim_{n \to +\infty} s_n(x) = f(x)$$

Voir TD   on l'admet

Preuve Soit n un entier naturel fixé

Definissons s_n.

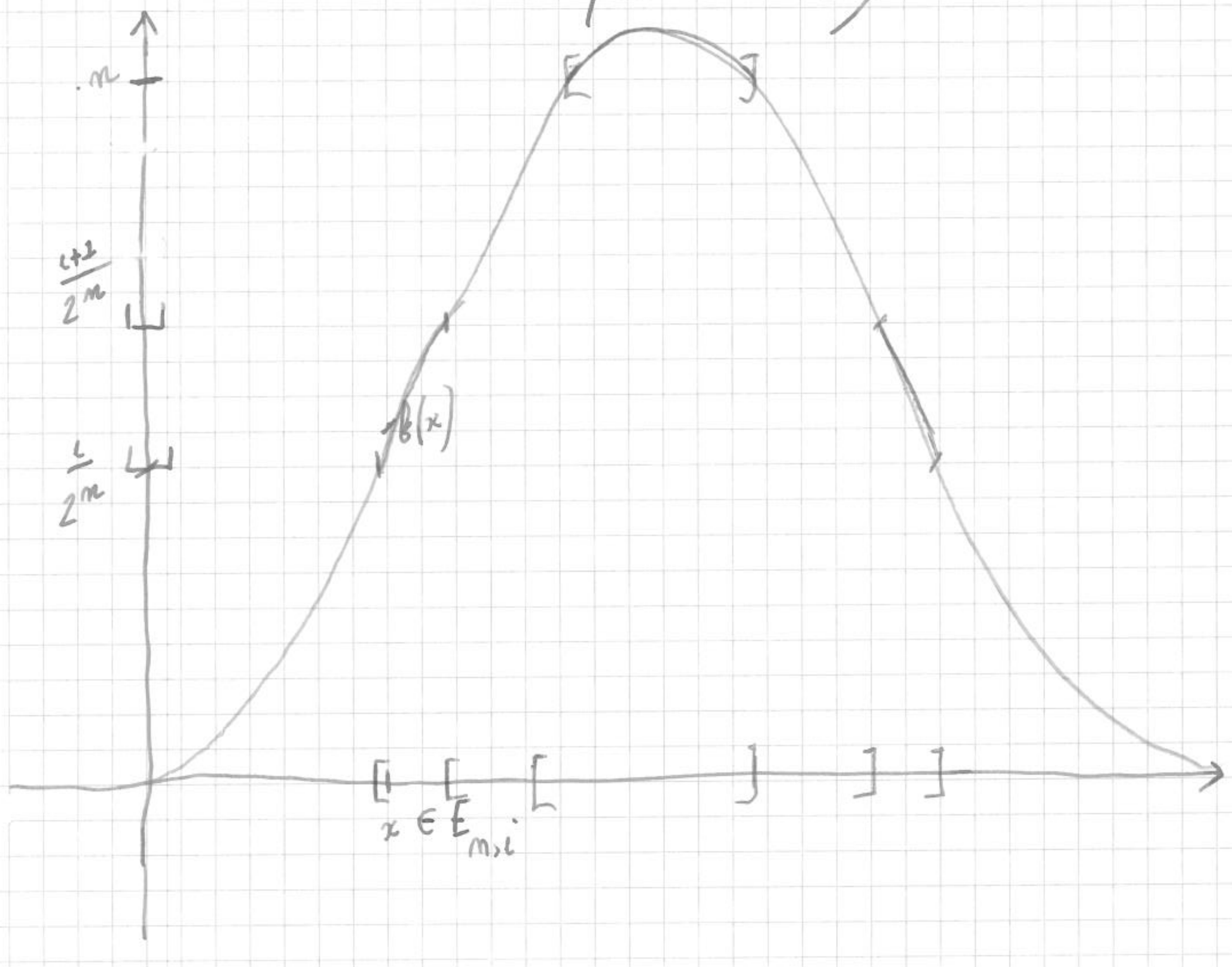
On découpe $[0, n[$ en des intervalles de longueurs $\frac{1}{2^n}$

$$[0, n[= \left[0, \frac{1}{2^n}\right[\cup \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right[\cup \quad \cup \left[\frac{n2^n-1}{2^n}; n\frac{2^n}{2^n}\right[$$

$$= \bigcup_{i=0}^{n2^n-1} \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right[$$

On a donc $n2^n$ intervalles

On pose $E_{n,i} = f^{-1}\left(\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right[\right)$



on pose $F_n = f^{-1}\left([n,+\infty]\right) \in$ σ-algèbre sur X

on pose $s_n = \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \varphi_{E_{n,i}} + n \varphi_F$

$[n,+\infty]$ fermé de $\overline{\mathbb{R}}$, comme f mesurable

$F_n = f^{-1}\left([n,+\infty]\right) \in \mathcal{A}$

de même $f^{-1}\left(\left[\frac{i}{2^n},+\infty\right]\right) \in \mathcal{A}$

$$\left[\frac{i}{2^n},\frac{i+1}{2^n}\right[= \left[\frac{i}{2^n},+\infty\right] \cap \underbrace{\left[-\infty,\frac{i+1}{2^n}\right[}_{\text{ouvert de } \overline{\mathbb{R}}}$$

Donc $f^{-1}\left(\left[\frac{i}{2^n},\frac{i+1}{2^n}\right[\right) = \underbrace{f^{-1}\left(\left[\frac{i}{2^n},+\infty\right]\right)}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{f^{-1}\left(\left[-\infty,\frac{i+1}{2^n}\right[\right)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$

car $\mathcal{A}$ stable par intersection finie

donc d'après Propriété s_n est simple

Aller page 40 d'abord

~~Comme la suite $s_n(x)$ est croissante~~ $\lim_{n\to+\infty} s_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ existe

Montrons que $\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = f(x)$.

Si $f(x) \neq +\infty$ pour n assez grand $f(x) \ngeq n$

$\underbrace{s_n(x)}_{= \frac{i}{2^n}} \leq f(x) < \underbrace{s_n(x)}_{= \frac{i}{2^n}} + \frac{1}{2^n}$ en passant à la limite

$\lim_{n\to+\infty} s_n(x) \leq \lim_{n\to+\infty} f(x) \leq \lim_{n\to+\infty} s_n(x) + 0$

Si $f(x) = +\infty$ $\forall n$ $s_n(x) = n \longrightarrow +\infty$ quand $n \to +\infty$

Montrons pour tout $x \in X$ $s_n(x) \leqslant s_{n+1}(x)$

1^{er} cas $f(x) \geqslant n+1$ donc $f(x) \geqslant n$

donc $s_{n+1}(x) = n+1$ et $s_n(x) = n$

2^e cas $f(x) < n$

donc $\exists !$ i entier compris entre 0 et $n2^n - 1$

tq $\frac{i}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{i+1}{2^n}$

$f(x) < n$ donc $< n+1$

donc $\exists !$ i' entier compris entre 0 et $(n+1)2^{n+1} - 1$

tq $\frac{i'}{2^{n+1}} \leqslant f(x) < \frac{i'+1}{2^{n+1}}$

donc $\frac{i}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{i'+1}{2^{n+1}}$

Mais on a $2i < i'+1$

donc

$2i \leqslant i'$ donc

donc $s_{n+1}(x) = \frac{i'}{2^{n+1}} \geqslant \frac{2i}{2^{n+1}} = s_n(x)$

3^e cas $n \leqslant f(x) < n+1$

donc $s_n(x) = n$ $\frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}} \leqslant f(x) < \frac{(i'+1)}{2^{n+1}}$

donc $i' \geqslant n2^{n+1}$ donc $s_{n+1}(x) = \frac{i'}{2^{n+1}} \geqslant n = s_n(x)$

VII mesures positives

Convention Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'elements de $[0,+\infty]$

- si il existe un n_0 tq $x_{n_0} = +\infty$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n := +\infty$

- si $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in [0,+\infty[$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \in [0,+\infty]$

est la limite de la suite des sommes partielles

$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$

def Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

Une mesure positive μ est une application $\mu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$

telle que i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) Condition d'additivité dénombrable

si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'elements de $\mathcal{A}$, 2 à 2 disjoints

c à d $\forall i, j \in \mathbb{N}+\infty$ $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

alors $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0} \mu(A_n)$

def On appelle probabilité, une mesure positive

tel que $\mu(X) = 1$.

l'objet du cours du 2nd semestre

Propriétés des mesures

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable

Soit μ une mesure positive sur $(X, \mathcal{A})$

alors μ vérifie

1) Condition d'additivité finie

Soient $B_1, \quad , B_q$ une suite finie d'éléments de $\mathcal{A}$.
deux à deux disjoints alors $\mu(B_1 \cup \quad \cup B_q) = \mu(B_1) + \quad + \mu(B_q)$

Preuve Posons $A_n = \begin{cases} B_n & \text{si } n \leq q \\ \emptyset & \text{si } n > q \end{cases}$ les A_n sont disjoints 2 à 2

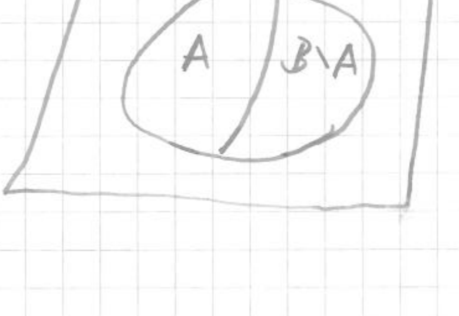
$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \bigcup_{n=1}^{q} B_n$

d'après la condition d'additivité dénombrable

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{q} \mu(B_n) + \cancel{\sum_{n=q+1}^{+\infty} \underbrace{\mu(\emptyset)}_{=0}}$$

2) monotonie Si $A \subset B$, A et $B \in \mathcal{A}$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$

Preuve $B = A \cup (B \setminus A)$ réunion disjointe
$B \setminus A = B \cap A^c \in \mathcal{A}$
d'après la condition d'additivité finie



$$\left.\begin{array}{l} \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \\ \text{Comme } \mu(B \setminus A) \geq 0 \end{array}\right\} \mu(B) \geq \mu(A)$$

3) sous-additivité

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$,
pas forcément 2 à 2 disjoints alors

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$$

Preuve On prend $B_0 = A_0$

$$B_1 = A_1 \setminus A_0$$

$$B_2 = A_2 \setminus (A_0 \cup A_1)$$

$$B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i \right) \text{ donc } \forall j < n \quad B_n \cap B_j \subset B_n \cap A_j = \emptyset$$

Par recurrence on a $\bigcup_{i=0}^{n} B_i = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$

donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

donc $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$

d'apres la monotonie car $B_n \subset A_n$

4) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'elements de $\mathcal{A}$

$A_0 \subset A_1 \subset \quad \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$

alors la suite croissante $\mu(A_n)$ converge vers $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$

Preuve: Soit $B_n = \begin{cases} A_n \setminus A_{n-1} & \text{si } n \geqslant 1 \\ A_0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ les B_n sont disjoint 2 à 2

donc $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n)$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) = \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right)}_{\text{Condition d'additivite finie}} = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$$

Rappel Interprétation d'une suite comme une série

Soit a_n une suite de réels

a_n est la somme d'ordre n de la série Σb_n

de terme général $b_n = \begin{cases} a_0 & \text{si } n \geqslant 0 \\ a_n - a_{n-1} & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$

5) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite decroissante d'elements de $\mathcal{A}$.

$A_0 \supset A_1 \supset \qquad A_n \supset A_{n+1}$

Si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\mu(A_{n_0}) < +\infty$

alors la suite decroissante $\mu(A_n)$ converge vers $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$

Preuve

en considerant la suite tronqué $(A_n)_{n \geqslant n_0}$, on peut supposer que $n_0 = 0$.

Donc supposons que $\mu(A_0) < +\infty$ donc $\forall n\in\mathbb{N}$ $\mu(A_n) < +\infty$

Soit $B_n = C_{A_0}^{A_n}$ = complementaire de A_n dans A_0

B_n est une suite croissante d'elements de $\mathcal{A}$

d'apres 4°) la suite $\mu(B_n)$ converge vers $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_{A_0}^{A_n} = C_{A_0}^{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n}$$

$$\mu(B_n) = \mu(A_0) - \mu(A_n)$$

$\downarrow$ qd $n \longrightarrow +\infty$

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mu(A_0) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

donc la suite $\mu(A_n)$ converge vers $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$

Exemples de mesures

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable

1. la mesure nulle $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) := 0$

2. la mesure grossière $\mu(\emptyset) := 0$ $\forall A \neq \emptyset \in \mathcal{A}$ $\mu(A) := +\infty$

3 Soit $x \in X$ fixé, la mesure de Dirac au point x noté δ_x

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Exemple fondamental

Théorème (admis) Unicité et Existence de la mesure de Lebesgue

Considérons $\mathbb{R}$ muni de la σ-algèbre des boréliens,
On rappelle que tous les intervalles de $\mathbb{R}$ sont des boréliens.
il existe une unique mesure μ sur $\mathbb{R}$ appelé mesure de Lebesgue qui vérifie

$\forall I \subset \mathbb{R}$ I intervalle de $\mathbb{R}$ $\mu(I) = $ longueur de I

"la mesure d'un intervalle est égale à la longueur de l'intervalle"