Chapitre 0

Rappels et préliminaires

I Integration des fonctions continues par morceaux

Le but de ce cours est d'introduire la théorie d'intégration la plus élaborée :
la théorie des integrales de Lebesgue (1902)

Commencons par rappeler la théorie d'intégration la plus simple celle que l'on utilise en pratique pour faire des calculs, qui a été vu au Lycée

1/ Integrale d'une fontion continue

Soit $[a, b]$ un segment $a < b$.

Soit $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application

def F est derivable sur $[a, b]$ si . pour tout $c \in]a, b[$,
F est derivable en c,
. F est derivable à droite
. F est derivable à gauche

Si F est derivable sur $[a, b]$ on appelle application derivee de F notée F' l'application definie par

$$F'(a) := \lim_{h \to 0^+} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}$$

$$F'(c) := \lim_{h \to 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}$$

$$F'(b) := \lim_{h \to 0^-} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}$$

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

On dit que F est une primitive de f si f est la derivee de F

Theorem (admis)

$\boxed{\text{Toute fonction } f \text{ continue sur } [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ admet une primitive } F \text{ sur } [a,b].}$

Remarque le theorem est faux sans l'hypothese f continue : Il existe des fonctions $f\ [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui n'ont pas de primitive F

rappel : 2 primitives sur un <u>intervalle</u> different d'un constante d'où

ex $f(x) = \frac{x}{|x|}$ et $g(x) = 0$ sont 2 primitives sur $\mathbb{R}^*$ de l'application nulle. Pourtant $f(x) - g(x)$ n'est pas une constante sur $\mathbb{R}^*$ seulement sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$

propriete Soit f une application continue sur $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

Le reel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a, b]$ ne depends pas du choix de la primitive F

def Le reel est appelé intégrale de a à b de f

notations : — on note l'intégrale d'une application f de a à b $\int_a^b f(t)\,dt$.

— Le nombre $F(b)-F(a)$ se note lui $\left[F(t)\right]_a^b$

on a donc

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b)-F(a)}$$

exemple $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$

2°/ Propriétés

Propriétés • relation de Chasles Soit $a < c < b$

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

• linéarité Soient f et g deux applications continues sur $[a,b]$ alors

Soient λ et $\mu \in \mathbb{R}$ $\lambda f + \mu g$ est une application continue sur $[a,b]$ et on a

$$\int_a^b \underbrace{(\lambda f+\mu g)(t)}_{\overset{\text{def}}{=}\ \lambda f(t)+\mu g(t)}\,dt = \lambda\int_a^b f(t)\,dt + \mu\int_a^b g(t)\,dt$$

autrement dit, $\displaystyle\int_a^b$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des applications continues sur $[a,b]$

à valeurs dans $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$

$$\int_a^b : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto \int_a^b f(t)\,dt$$

est linéaire

- positivité

Soit $f\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application continue sur $[a,b]$ positive

alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$

3°/ Intégrale d'une application continue par morceaux

Soit $f\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur le segment $[a,b]$.

def On dit que f est continue par morceaux s'il existe une subdivision de $[a,b]$

$a = a_0 < a_1 < \dots \qquad < a_n = b$

et des applications continues $f_i\ [a_i, a_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$

telle que $\forall\ 0 \leqslant i \leqslant n-1$

$$\forall\ t \in]a_i, a_{i+1}[\quad f(t) = f_i(t)$$

Propriété : Le réel $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t)\,dt$ où

$a = a_0 < a_1 < \qquad < a_n = b$ est une subdivision de $[a,b]$

et $f_i\ [a_i, a_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications continues

qui coïncident avec f sur $]a_i, a_{i+1}[$

est independant des f_i et de la subdivision choisie

def Ce reel est appele $\int_a^b f(t)\,dt$

Proprietes • on a toujours la relation de Chasles

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt \quad a < c < b$$

• La valeur d'une integrale $\int_a^b f(t)\,dt$ ne change pas si on change f en un nombre fini points.

Ces 2 proprietes sont clairement verifies car on a tout fait pour dans la definition de l'intégrale d'une application continue par morceaux

on a encore • linearite

• positivité.

En 1^{re} et 2^{eme} annee, on peut voir deux autres theories d'integrations

- integrale des applications reglees
- integrale de Riemann

continue par morceaux sur $[a, b]$ $\xRightarrow{\text{Ramis IV 2.2.2 2°}}$ reglee sur $[a, b]$ $\xRightarrow{\text{Ramis III.6.4.1 2°}}$ integrable au sens de Riemann sur $[a, b]$

Dans ce cours, on va definir une 4^{eme} theorie d'integration qui ~~verifie~~ encore les proprietes precedentes

Les integrales de Lebesgue

- Chasles
- inchange si on change un nbre fini de points
- linearité
- positivité

on demontrera

si f est continue sur $[a, b]$ alors f est integrable au sens de Lebesgue sur $[a, b]$

et on a
$$\underbrace{\int_{[a,b]} f \, d\mu}_{\text{integrale de Lebesgue}} = \underbrace{\int_a^b f(t)\, dt}_{\text{integrale d'une application continue sur } [a,b]}.$$

plus generalement Briane - Pages Proposition 7.5

II Ensembles finis, denombrables

1°/ equipotence

définition Soient X et Y deux ensembles.

On dit que X est equipotent à Y ou que "X a le même cardinal que Y"
s'il existe une application f bijective de X sur Y.

Proprietes
- X est equipotent à X
- Si X est equipotent à Y alors Y est equipotent à X
- Si X est equipotent à Y et Y est equipotent à Z

alors X est equipotent à Z

La relation d'équipotence est donc reflexive, symetrique et transitive c a d est une relation d'equivalence sur la "collection" de tous les ensembles.

On ne peut pas parler "ensemble de tous les ensembles"

ex l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est equipotent à l'ensemble des entiers naturels multiples de 2, noté $2\mathbb{N}$
car l'application $\begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N} \\ n \longmapsto 2n \end{array}$ est une bijection

2°/ ensembles finis

def Un ensemble X est dit fini si il existe

un entier naturel $n \geq 0$ tel que

X soit equipotent à l'ensemble $\{1, 2, 3, \quad, n\}$
est en bijection

L'entier naturel n est unique. On l'appelle cardinal de X et on le note $n = \text{card } X$

On peut numeroter les elements de X de maniere distincte

$X = \{x_1, x_2, \quad , x_n\}$ ensemble à n elements

exemple $\text{card } \emptyset = 0$.

def Tout ensemble qui n'est pas fini est dite infini

Proprieté. Toute partie A d'un ensemble fini X est finie et on a $\text{card } A \leqslant \text{card } X$

. Soit X un ensemble fini et $f : X \longrightarrow Y$ une surjection de X vers un ensemble Y

alors Y est fini et on a $\text{card } X \geqslant \text{card } Y$

. Soient X et Y deux ensembles finis avec le même cardinal et f une application de $E \longrightarrow F$.

Alors on a les equivalences suivantes

f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective.

Soient X et Y deux ensembles finis

alors $X \times Y := \{(x, y) / x \in X \text{ et } y \in Y\}$ est fini

et $\text{card } (X \times Y) = \text{card } X \times \text{card } Y$

alors $Y^X :=$ ensemble des applications de X vers Y est fini et $\text{card } (Y^X) = (\text{card } Y)^{\text{card } X}$

demo ~~ex~~

rem $Y^m = Y^{\{1, \ldots, m\}}$

3°/ ensembles denombrables

def On appelle ensemble X denombrable tout ensemble equipotent (= en bijection) avec l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

$$\varphi \quad \mathbb{N} \longrightarrow X$$
$$n \longmapsto x_n := \varphi(n)$$

Intuitivement On peut numeroter $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$

les x_n distincts 2 à 2.

Comme $\mathbb{N}$ n'est pas fini, un ensemble dénombrable est forcement infini

Propriete . Toute partie d'un ensemble d'un ensemble denombrable est soit fini, soit denombrable

Mercredi 20 Septembre 2006

. Soit X un ensemble denombrable et $f : X \longrightarrow Y$ une surjection de X vers un ensemble Y alors Y est soit fini, soit denombrable

Le produit de deux ensembles denombrables est un ensemble denombrable demo exo 4 dev 1 i)

Application $\mathbb{Q}$ est denombrable

Soit X un ensemble

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X

On suppose que $\forall i \in I$, A_i est denombables
et que I est denombable

alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est denombable exo

en resume, Tout reunion d'une famille
denombrable d'ensembles denombrables est denombrable

Tout reunion finie d'ensembles denombrables est
denombrables ex $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^{\setminus \mathbb{N}}$
Tout reunion denombrables d'ensembles finies est soit
finies soit denombrables

Conclusion Il y a deux types d'ensembles infinis
les denombrables
les non denombrables ex $\mathbb{R}$ exo.

III Espace topologiques

Soit E un ensemble

def On appelle topologie sur E, tout partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $E \in \mathcal{T}$
- Si A et $B \in \mathcal{T}$ alors $A \cap B \in \mathcal{T}$
- Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'elements de $\mathcal{T}$
  alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

Les elements de $\mathcal{T}$ s'appellent les ouverts de la topologie $\mathcal{T}$

En résumé

les ouverts forment un ensemble de parties de E qui

contient la partie vide $\emptyset$
la partie de E, E tout entier

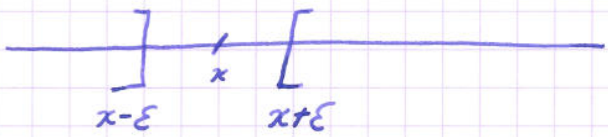
et qui est stable par intersection finie
et reunion quelconque.

def Un ensemble E muni d'une topologie $\mathcal{T}$ est appele espace topologique.

ex la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$

Par définition, une partie O de $\mathbb{R}$ est un ouvert pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$

ssi $\forall x \in O$, $\exists\, \varepsilon > 0$ tq $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset O$



intuitivement O ouvert veut dire que O ne contient aucun point de sa frontiere

ex les intervalles ouverts $]a, b[$

Soit E un espace topologique
Soit F une partie de E.

def F est dense dans E si quelque soit O ouvert de E non vide, $O \cap F \neq \emptyset$

" Une partie d'un espace topologique est dense ssi elle rencontre tous les ouverts non vide de E.

Soit (E, d) un espace metrique

Proposition ~~Considérons $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle.~~

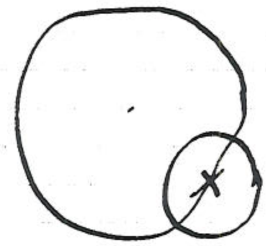
Soit F une partie de ~~$\mathbb{R}$~~ E

F est dense dans E ~~$\mathbb{R}$~~ $\iff \forall x \in$ ~~$\mathbb{R}$~~ E $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, y \in F$ $d(x,y) \overset{\text{def}}{=} \cancel{|y-x|} < \varepsilon \iff$ tout element de ~~$\mathbb{R}$~~ E est limite d'une suite d'elements de F

F dense dans le metrique E $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists y \in F$ tq $d(x,y) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ tout element de E est limite d'une suite d'element de F

Soit (E, d) un espace metrique



Soit $F \subset E$.

F est dense dans E $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E$

O ouvert contenant x

$\forall$ V voisinage de x, $V \cap F \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow$ $\forall x \in E\quad \forall \varepsilon > 0\quad \exists y \in F$
tq $\quad d(x,y) \leqslant \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\forall x \in E$ en prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$,

$\exists\, y_n \in F$ tq $d(x, y_n) \leqslant 1/n$

il existe une suite d'elements y_n de F convergeant vers x.

$\Leftarrow$ Soit y_n une suite d'element de F convergeant vers x dans E
alors $x \in \overline{F}$

Theoreme de Stone - Weierstrass au programme du CAPES

a) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue

alors f est limite uniforme d'une suite de polynomes

b). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue de periode 2π alors f est limite uniforme exemple : $\mathbb{Q}$ est une partie dense de $\mathbb{R}$

Vous verrez plus tard que par construction de $\mathbb{R}$,

tout reel est limite d'une suite de rationnels

On peut aussi le demontrer en utilisant
l'ecriture decimale

Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel.

$x = x_0, x_1 x_2 x_3 \quad \dots x_n \dots$ sous forme

decimale ou x_0 est un entier
et les x_n, $n \geqslant 1$ des chiffres compris entre 0 et 9

donc $$x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n 10^{-n}$$ somme d'une serie

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} x_k 10^{-k} \right) \qquad \square$$

inutile jusqu'à page 17 incluse

$\in \mathbb{Q}$ cf page 15

Proposition Tout ouvert O de $\mathbb{R}$ est reunion denombrable (ou fini) d'intervalles ouverts (disjoint 2 à 2 non vide.)

preuve

(adapte de cours Calcul diff ENS Lyon et cours DUBOIS)

exemple . $\mathbb{R}$ reunion d'1 seul intervalle $\mathbb{R}$

. $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+\frac{1}{2}[$ reunion denombrable

Rappel def Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle
ssi $\forall$ $x \leq y \in I$
$$[x, y] \subset I$$

thm Les intervalles sont $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$,
$[a, b]$, $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$
et $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ et $\emptyset$.

preuve Ramis tome 3, 2.1.6

$a = \inf I$ $\quad b = \sup I$, on a $I \subset [a, b]$

Soit $x \in]a, b[$ $\qquad a < x$

a = plus grand des minorants donc x pas un minorant de I donc $\exists$ $\quad u < x \quad u \in I$
idem $\exists$ $\quad v \in I \quad x < v$ donc $x \in]u, v[\subset I$

donc $]a, b[\subset I \subset [a, b]$.

Lemme la reunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ $(A_i)_{i \in I}$
dont l'intersection $\bigcap_{i \in I} A_i$ est non vide
est un intervalle.

preuve Soit $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ Soit $y \in \bigcup_{i \in I} A_i$
donc $\exists\, i \in I$ tq $y \in A_i$ $j \in I$ tq $j \in A_j$

Preuve de la Proposition

Soit $x \in O$.

Soit $\mathcal{U}_x$ le plus grand intervalle contenant x inclus dans O

existe car $\{x\} = [x, x]$ est un intervalle contenant x

et $\mathcal{U}_x = \bigcup$ intervalle contenant x inclus dans O
est un intervalle, évidemment contenant x et inclus dans O d'après lemme

Considérons $x, y \in O$

soit $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y$

soit $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \emptyset$

Supposons $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y \neq \emptyset$ alors $\mathcal{U}_x \cup \mathcal{U}_y$
est un intervalle, inclus dans O contenant x et y
d'après lemme

donc $\mathcal{U}_x \cup \mathcal{U}_y \subset \mathcal{U}_x$ le plus grand intervalle contenant x inclus dans x donc $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \mathcal{U}_x$

idem $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \mathcal{U}_y$

donc les U_x forment une partition de O

on a donc une relation d'equivalence

$x \mathcal{R} y$ ssi $U_x = U_y$

Soit $(x_i)_{i \in I}$ un systeme de representants de cette relation d'equivalence

c à d $\forall i \neq j \in I \quad U_{x_i} \neq U_{x_j}$

et $\bigcup_{i \in I} U_{x_i} = O$

Montrons que les U_x sont des intervalles ouverts en utilisant enfin que O est un ouvert de $\mathbb{R}$

Supposons que $U_x =]a, b]$

Comme $b \in O$ et O ouvert, $\exists \varepsilon > 0$ tq

$]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\subset O$ donc $x \in]a, b+\varepsilon[\subset O$ contradiction

Considerons l'application

$$\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow I$$
$$q \longmapsto \begin{cases} i_0 & \text{si } q \notin O \\ i & \text{si } q \in U_{x_i} \end{cases}$$

, φ est surjective car $\forall i \in I$

i a des antecedents car $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$

donc $U_{x_i} \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ c à d $\exists q \in \mathbb{Q}$ tq $q \in U_{x_i}$

comme φ est surjectif, et $\mathbb{Q}$ denombrabre

I est fini ou denombrable. $\square$

def Soient X et Y deux espaces topologiques
Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application
f est continue si pour tout ouvert V de Y,
$f^{-1}(V) \overset{def}{:=} \{ x \in X \text{ tq } f(x) \in V \}$ l'image reciproque
de V par f est un ouvert de X

fin cours Vendredi 22 Septembre 2006
continuite sur un sous ens A

Briane - Pagès p 46

8 bis

Tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est réunion d'une famille dénombrable de boules ouvertes. Plus précisément, $\exists$ famille dénombrable de boules ouvertes B_n tq $\forall O$ ouvert, $\exists I \subset \mathbb{N}$ tq $O = \bigcup_{n \in I} B_n$

Topologie sur $\mathbb{R}^d$

Par définition, une partie O de $\mathbb{R}^d$ est un ouvert pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}^d$

ssi $\forall x \in O \quad \exists \varepsilon > 0$ tq $B(x, \varepsilon) \subset O$

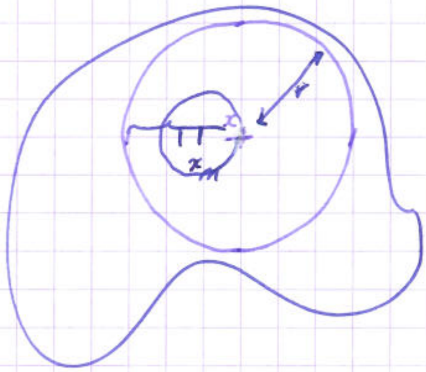
indépendant de la norme choisie $\| \|_2, \| \|_1, \| \|_\infty$ car toutes les normes sont équivalentes

Montrer que $\mathbb{Q}^d$ est dense dans $\mathbb{R}^d$

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^d$

Soit $x \in O$,

$\exists\ n > 0 \in \mathbb{Q}$ tq $x \in B(x, \frac{1}{n}) \subset O$



x limite d'une suite d'élts de $\mathbb{Q}^d$

donc $\exists\ q \in \mathbb{Q}^d$

tq $|x - q| < \frac{1}{2n}$

$x \in B(q, \frac{1}{2n}) \subset B(x, \frac{1}{n}) \subset O$

donc $O \subset \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q}^d \\ n \in \mathbb{N}^* \\ \text{tq } B(q, \frac{1}{n}) \subset O}} B(q, \frac{1}{n})$

donc $O = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q}^d, n \in \mathbb{N}^* \\ B(q, 1/n) \subset O}} B(q, \frac{1}{n})$

Corollaire

Tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est réunion (finie ou) dénombrable de boules ouvertes

On peut se ramener au cas dénombrable en prenant la réunion avec la même boule.