Série d'exercices n^o 4. Algèbre linéaire. 2013-2014

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Soit $(u_1, \ldots, u_q)$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Soit $(v_1, \ldots, v_r)$ une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$. Soit $(e_1, \ldots, e_s)$ une base de $\mathbb{R}^n$.

a) Soit $(u_1, \ldots, u_q)$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si f est injectif, alors l'image de la famille libre par f, $(f(u_1), \ldots, f(u_q))$, est une famille libre de $\mathbb{R}^p$.

b) Soit $(v_1, \ldots, v_r)$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si f est surjectif, alors l'image de la famille génératrice par f, $(f(v_1), \ldots, f(v_r))$, est une famille génératrice de $\mathbb{R}^p$.

c) Montrer que si f est bijectif, alors l'image de la base par f, $(f(e_1), \ldots, f(e_s))$, est une base de $\mathbb{R}^p$ (En particulier $n = s = p$).

d) Réciproquement, montrer que si l'image de la base par f, $(f(e_1), \ldots, f(e_s))$, est une base de $\mathbb{R}^p$, alors f est bijectif.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.

b) Déterminer les sous-espaces propres de A et donner une base de chacun d'eux.

c) A est-elle diagonalisable ? Si oui, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Même questions pour la matrice B.

Exercice 3

Dans une zone de nidification d'une espèce d'oiseaux marins qui est constituée de trois îles on observe :

- parmi ceux qui ont nidifié une année dans l'île A l'année suivante, 70% nidifieront encore dans l'île A, 20% nidifieront dans l'île B, et 10% nidifieront dans l'île C.

- parmi ceux qui ont nidifié une année dans l'île du B l'année suivante, 60% nidifieront encore dans l'île B, 20% nidifieront dans l'île A et 20% nidifieront dans l'île C.

- parmi ceux qui ont nidifié une année dans l'île C l'année suivante, 50% nidifieront encore dans l'île C, 30% nidifieront dans l'île B, et 20% nidifieront dans l'île A. On admet que le nombre des oiseaux reste constant.

a) Quelle est l'ultime répartition dans les différentes zones de nidification ?

b) Quelle est la répartition dans les différentes zones de nidification au bout de n années en fonction d'une répartition initiale A_0, B_0 et C_0 ? Retrouver l'ultime répartition en faisant tendre n vers $+\infty$.