

**Exercice 1**

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0,04 & -8 & 32 \\ 0,02 & 3 & 7 \\ 0,03 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

**Exercice 2**

Pour quelles valeurs du paramètre réel  $m$  les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & m \\ -1 & -1 & m \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3**

À l'aide des déterminants, préciser si les familles suivantes sont des bases de  $\mathbb{R}^4$  ou non :

- a)  $\{(1, -1, 1, 0), (1, 0, 1, -1), (1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1)\}$   
 b)  $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$

**Exercice 4**

Sans recours au calcul expliquez pourquoi, quel que soit le choix des coefficients, la matrice suivante n'est jamais inversible :

$$\begin{pmatrix} a & \alpha & \alpha^2 & 2a + \alpha \\ b & \beta & \beta^2 & 2b + \beta \\ c & \gamma & \gamma^2 & 2c + \gamma \\ d & \delta & \delta^2 & 2d + \delta \end{pmatrix}$$

**Exercice 5**

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ .

- a) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de  $A$ .  
 b) Déterminer les sous-espaces propres de  $A$  et donner une base de chacun d'eux.  
 c)  $A$  est-elle diagonalisable ? Si oui, calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  
 d) Même questions pour la matrice  $B$ .

**Exercice 6**

Dans une zone de nidification d'une espèce d'oiseaux marins qui est constituée de trois îles on observe :

- parmi ceux qui ont nidifié une année dans l'île  $A$  l'année suivante, 70% nidifieront encore dans l'île  $A$ , 20% nidifieront dans l'île  $B$ , et 10% nidifieront dans l'île  $C$ .
- parmi ceux qui ont nidifié une année dans l'île  $B$  l'année suivante, 60% nidifieront encore dans l'île  $B$ , 20% nidifieront dans l'île  $A$  et 20% nidifieront dans l'île  $C$ .
- parmi ceux qui ont nidifié une année dans l'île  $C$  l'année suivante, 50% nidifieront encore dans l'île  $C$ , 30% nidifieront dans l'île  $B$ , et 20% nidifieront dans l'île  $A$ . On admet que le nombre des oiseaux reste constant.

- a) Quelle est l'ultime répartition dans les différentes zones de nidification ?  
 b) Quelle est la répartition dans les différentes zones de nidification au bout de  $n$  années en fonction d'une répartition initiale  $A_0$ ,  $B_0$  et  $C_0$  ? Retrouver l'ultime répartition en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ .