Agrocampus L2

Série d'exercices n^o 3. Algèbre linéaire. 2013-2014

Exercice 1

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0,04 & -8 & 32 \\ 0,02 & 3 & 7 \\ 0,03 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2

Pour quelles valeurs du paramètre réel m les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & m \\ -1 & -1 & m \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

À l'aide des déterminants, préciser si les familles suivantes sont des bases de $\mathbb{R}^4$ ou non :

a) $\big\{(1,-1,1,0),\ (1,0,1,-1),\ (1,1,1,1),\ (0,0,1,1)\big\}$

b) $\big\{(1,1,0,0),\ (1,0,1,0),\ (0,1,0,1),\ (0,0,1,1)\big\}$

Exercice 4

Sans recours au calcul expliquez pourquoi, quel que soit le choix des coefficients, la matrice suivante n'est jamais inversible :

$$\begin{pmatrix} a & \alpha & \alpha^2 & 2a+\alpha \\ b & \beta & \beta^2 & 2b+\beta \\ c & \gamma & \gamma^2 & 2c+\gamma \\ d & \delta & \delta^2 & 2d+\delta \end{pmatrix}$$

Exercice 5

Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 1\}$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + |y| = 0\}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$

Exercice 6

On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$.

1) $\vec{u} = (1,\ 2,\ -1)$, $\vec{v} = (1,\ 0,\ 1), \vec{w} = (-1,\ 2,\ -3),$.

2) $\vec{u} = (-1,\ 2,\ 5)$, $\vec{v} = (2,\ 3,\ 4)$, $\vec{w} = (7,\ 0,\ -7),$.

3) $\vec{u} = (1,\ 3,\ -2)$, $\vec{v} = (3,\ 2,\ -6)$, $\vec{w} = (\frac{3}{2},\ -\frac{11}{3},\ -3)$.

Montrer que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont linéairement dépendants et écrire la relation liant ces trois vecteurs dans chacun des cas.

Exercice 7

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées :

1) $\{(7,\ 12),\ (18,\ -13),\ (\frac{17}{3},\ \frac{8}{5})\}$.

2) $\{(-1,\ 0,\ 2),\ (1,\ 3,\ 1),\ (0,\ 1,\ -1)\}$.

3) $\{(-1,\ 2,\ 1,\ 4),\ (0,\ 3,\ -1,\ 2),\ (-2,\ 1,\ 3,\ 6)\}$.

Exercice 8

Montrer que si une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ contient le vecteur nul $\vec{0}$, alors elle est nécessairement liée. Comment formuler ce résultat en termes de famille libre ?

Exercice 9
a) Montrer que les vecteurs $\vec{u} = (2,\ 1)$, $\vec{v} = (-1,\ 2)$ et $\vec{w} = (1,\ 3)$ constituent une famille génératrice de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
b) Soit $\vec{x} = (x_1,\ x_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Exprimer $\vec{x}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.
c) Cette décomposition est-elle unique ?

Exercice 10
Les vecteurs suivants forment-ils un système générateur de $\mathbb{R}^3$:
1) $\vec{u} = (1,\ -1,\ 2)$, $\vec{v} = (3,\ 1,\ 1)$, $\vec{w} = (-3,\ -5,\ 4)$?
2) $\vec{u} = (0,\ 1,\ 3)$, $\vec{v} = (-1,\ 1,\ 0)$, $\vec{w} = (2,\ 0,\ 1)$, $\vec{t} = (4,\ 5,\ 6)$?

Exercice 11
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère les vecteurs $\vec{\varepsilon_1}$, $\vec{\varepsilon_2}$, $\vec{\varepsilon_3}$ donnés dans la base $\mathcal{B}$ par

$$\vec{\varepsilon_1} = (1,\ 1,\ 1),\quad \vec{\varepsilon_2} = (1,\ 2,\ 3),\quad \vec{\varepsilon_3} = (1,\ 2,\ 4)\,.$$

1) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = \{\vec{\varepsilon_1},\ \vec{\varepsilon_2},\ \vec{\varepsilon_3}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Soit $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(-1,\ 1,\ 2)$ dans la base $\mathcal{B}$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}'$?
3) Soit $\vec{v}$ le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(1,\ 0,\ 1)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 12
Trouver une base pour chacun des sous-espaces vectoriels suivants
1) $A = \{(2a, a-b, a+b, -b)\ ;\ \ a, b \in \mathbb{R}\}$
2) $B = \{(a-b, a+b, 2a, b)\ ;\ \ a, b \in \mathbb{R}\}$
3) $C = \{(a-2b, b+2c, a, b-c)\ ;\ \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 13
1) On considère le sous espace vectoriel défini par l'équation $x - 3y + 2z = 0$. Montrer que les vecteurs

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en forment une base.
2) Trouver une base du sous espace de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $2x - 3y + 4z = 0$.
3) Trouver une base du sous espace de $\mathbb{R}^4$ défini par les DEUX équations :

$$\begin{cases} x + y + z + w &= 0 \\ x + 2y + 3z - 5w &= 0 \end{cases}$$

Exercice 14
Trouver une base du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les 4 vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$