Agrocampus L2

Série d'exercices n^o 2. Algèbre linéaire. 2013-2014

Exercice 1

Calculer les produits $A.B$ et $A.C$ lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit $B.A$ a-t-il un sens ? pourquoi ?

Exercice 2 : forme matricielle d'un système d'équations linéaires

On considère les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On admet que $A.B = B.A = I_3$.

a) On considère le système linéaire homogène suivant :

$$(S) \begin{cases} x + \quad +z &= 0 \\ 2x + y &= 0 \\ 3x + 2y + z &= 0 \end{cases}$$

Trouver l'ensemble des solutions de (S) sans calculs.

b) Trouver l'ensemble des solutions du système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} x + \quad +z &= 1 \\ 2x + y &= 2 \\ 3x + 2y + z &= 1 \end{cases}$$

et plus généralement celui du système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} x + \quad +z &= a \\ 2x + y &= b \\ 3x + 2y + z &= c \end{cases}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sans faire la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 3

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice diagonale soit inversible et calculer son inverse lorsqu'elle existe.

Exercice 4

Dans une usine agroalimentaire, on utilise trois céréales A, B, et C pour fabriquer trois farines F, G, et H. On sait que :

-Pour fabriquer 100kg de F il faut 50kg de A, 25kg de B, et 25kg de C.

-Pour fabriquer 100kg de G il faut 75kg de A, 15kg de B, et 10kg de C.

-Pour fabriquer 100kg de H il faut 45kg de A, 20kg de B, et 35kg de C.

a) Quelles quantités respectives, exprimées en tonnes, de farine F, G, et H pourra-t-on fabriquer en utilisant 345 tonnes de A, $102,5$ tonnes de B, et $102,5$ tonnes de C ?

b) Quelles quantités respectives de céréales seront nécessaires pour fabriquer 2 tonnes de farine F, 500kg de farine G, et 800kg de farine H ?

Exercice 5
On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Démontrer que $A^3 - 2.A^2 - A + 2.I_3 = 0$. Déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

b) Soit la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que D est inversible et calculer D^{-1}.

c) Calculer $D^{-1}.A.D$ et déduire $A^n, n \geq 1$.

Exercice 6
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Démontrer que $A^2 - 3A = 0$. Déduire que A n'est pas inversible.
b) Montrer que D est inversible et calculer D^{-1}.

c) Calculer $D^{-1}.A.D$ et déduire $A^n, n \geq 1$.

Exercice 7
Soit

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \frac{7}{4} \\ -1 & 1 & \frac{13}{8} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que D est inversible et calculer son inverse D^{-1}.

b) Calculer $D^{-1}.\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}.D$ et déduire $A^n, n \geq 1$.

Application : Un sondage rapide sur l'écoute des chaines de télévision montre que lors d'une soirée pour les 3 chaines A, B, et C, les pourcentages de téléspectateurs sont respectivement de 40, 30, et 30. Chaque jour, au cours de la soirée les téléspectateurs zappent d'une chaine vers les autres avec les pourcentages suivants :

70	20	20
20	60	30
10	20	50

Quelle sera l'évolution du nombre de téléspectateurs par chaine avec ces informations ?

Exercice 8 Exercice 22 dans le livre "Une introduction moderne à l'algèbre linéaire" de Vincent Blanloeil.