

Exercice 1

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées :

- 1) $\{(7, 12), (18, -13), (\frac{17}{3}, \frac{8}{5})\}$.
- 2) $\{(-1, 0, 2), (1, 3, 1), (0, 1, -1)\}$.
- 3) $\{(-1, 2, 1, 4), (0, 3, -1, 2), (-2, 1, 3, 6)\}$.

Exercice 2

Montrer que si une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ contient le vecteur nul $\vec{0}$, alors elle est nécessairement liée. Comment formuler ce résultat en termes de famille libre ?

Exercice 3

- a) Montrer que les vecteurs $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (-1, 2)$ et $\vec{w} = (1, 3)$ constituent une famille génératrice de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
- b) Soit $\vec{x} = (x_1, x_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Exprimer $\vec{x}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. c) Cette décomposition est-elle unique ?

Exercice 4

Les vecteurs suivants forment-ils un système générateur de $\mathbb{R}^3$:

- 1) $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (3, 1, 1)$, $\vec{w} = (-3, -5, 4)$?
- 2) $\vec{u} = (0, 1, 3)$, $\vec{v} = (-1, 1, 0)$, $\vec{w} = (2, 0, 1)$, $\vec{t} = (4, 5, 6)$?

Exercice 5

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère les vecteurs $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$, $\vec{\varepsilon}_3$ donnés dans la base $\mathcal{B}$ par

$$\vec{\varepsilon}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{\varepsilon}_2 = (1, 2, 3), \quad \vec{\varepsilon}_3 = (1, 2, 4).$$

- 1) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Soit $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(-1, 1, 2)$ dans la base $\mathcal{B}$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}'$?
- 3) Soit $\vec{v}$ le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(1, 0, 1)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 6

Trouver une base pour chacun des sous-espaces vectoriels suivants

- 1) $A = \{(2a, a - b, a + b, -b) ; a, b \in \mathbb{R}\}$
- 2) $B = \{(a - b, a + b, 2a, b) ; a, b \in \mathbb{R}\}$
- 3) $C = \{(a - 2b, b + 2c, a, b - c) ; a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 7

- 1) On considère le sous espace vectoriel défini par l'équation $x - 3y + 2z = 0$. Montrer que les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en forment une base.

- 2) Trouver une base du sous espace de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $2x - 3y + 4z = 0$.
- 3) Trouver une base du sous espace de $\mathbb{R}^4$ défini par les DEUX équations :

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + 2y + 3z - 5w = 0 \end{cases}$$

Exercice 8

Trouver une base du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les 4 vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$