Agrocampus L2

Série d'exercices n^o 1. Algèbre linéaire. 2013-2014

Exercice 1

Résoudre par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & + & 5x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ & & 3x_2 & - & 6x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & -1 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & -1 \end{array}\right. ,$$

Exercice 2

Résoudre par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 10z & = & 5 \\ 3x & + & y & - & 4z & = & -1 \\ 4x & + & y & + & 6z & = & 1 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & + & 6z & = & 18 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 24 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 4 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 5y & + & 2z & = & -1 \\ 7x & + & 17y & + & 5z & = & -1 \end{array}\right.$$

Exercice 3

Discuter, selon les valeurs du paramètre réel a, le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & ay & - & z & = & 1 \\ -x & + & (a-2)y & + & z & = & -1 \\ 2x & + & 2y & + & (a-2)z & = & 1 \end{array}\right.$.

Exercice 4 : Formules de Cramer pour un système de deux équations.

Soit (S) le système linéaire de deux équations $\left\{\begin{array}{rcrcr} ax & + & by & = & c \\ a'x & + & b'y & = & c' \end{array}\right.$. On appelle *déterminant* de (S), noté $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ le produit en croix, $ab' - ba'$.

(1) Montrer à l'aide du pivot de Gauss, que (S) admet une solution unique si et seulement si son déterminant $ab' - ba' \neq 0$. Dans ce cas, montrer que la solution est donnée par les formules suivantes appelées *formules de Cramer*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

(2) Application : résoudre $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 4 \\ 5x & + & 6y & = & 7 \end{array}\right.$.

(3) Interprétation géométrique.

Exercice 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que la matrice de f soit la matrice A.

a) Pour tout réel λ, déterminer Ker $(f - \lambda id_{\mathbb{R}}^3)$, le noyau de l'application obtenue en retranchant à f, λ fois l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

b) En déduire quand $f - \lambda id_{\mathbb{R}}^3$ est injectif en fonction de λ.

c) Calculer Im f, l'image de f.

d) f est-elle surjective ?

Exercice 6

i) Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire f dont la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

ii) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 7

On considère les applications f et g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par :

$$f(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z)\,, \qquad g(x,y,z) = (x+y+z, x-z, y-z)\,.$$

i) Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. Que constate-t-on ?

ii) A l'aide de produits des matrices $\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g)$, retrouver le résultat dérivé ci-dessus.

Exercice 8

Soit f l'application linéaire dont la matrice est $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

i) Montrer que f est bijective et calculer la matrice de sa bijection réciproque f^{-1}.

ii) En déduire l'inverse B^{-1} de la matrice B.