

Exercice 1

Résoudre par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ \quad 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 + x_5 = -1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = -1 \end{cases},$$

Exercice 2

Résoudre par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + 10z = 5 \\ 3x + y - 4z = -1 \\ 4x + y + 6z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + 4y + 6z = 18 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ 3x + y - 2z = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 5y + 2z = -1 \\ 7x + 17y + 5z = -1 \end{cases}$$

Exercice 3

Discuter, selon les valeurs du paramètre réel a , le système $\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ -x + (a-2)y + z = -1 \\ 2x + 2y + (a-2)z = 1 \end{cases}$.

Exercice 4 : Formules de Cramer pour un système de deux équations.

Soit (S) le système linéaire de deux équations $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$. On appelle

déterminant de (S) , noté $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ le produit en croix, $ab' - ba'$.

- (1) Montrer à l'aide du pivot de Gauss, que (S) admet une solution unique si et seulement si son déterminant $ab' - ba' \neq 0$. Dans ce cas, montrer que la solution est donnée par les formules suivantes appelées *formules de Cramer*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

- (2) Application : résoudre $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$.

- (3) Interprétation géométrique.

Exercice 5

Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 1\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + |y| = 0\}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$$

Exercice 6

On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$.

$$1) \vec{u} = (1, 2, -1), \vec{v} = (1, 0, 1), \vec{w} = (-1, 2, -3), .$$

$$2) \vec{u} = (-1, 2, 5), \vec{v} = (2, 3, 4), \vec{w} = (7, 0, -7), .$$

$$3) \vec{u} = (1, 3, -2), \vec{v} = (3, 2, -6), \vec{w} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{3}, -3\right) .$$

Montrer que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont linéairement dépendants et écrire la relation liant ces trois vecteurs dans chacun des cas.