

Examen : Lundi 19/01/15, 8h00-10h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Aucun document n'est autorisé. Le corrigé sera disponible sur la page web www.menichi.com.

Problème

Partie I : Diagonalisation

On considère l'application linéaire $g : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ définie par tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$ par

$$g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} z+t \\ z+t \\ x+y \\ x+y \end{pmatrix}.$$

1) (1 Point) Donner B la matrice de g .

2) (1 Point) Calculer $g \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. En déduire un vecteur propre et une valeur propre de g .

3) (4 Points) Montrer que pour tout réel λ ,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+2)(\lambda-2).$$

Indication :

-On pourra commencer par additionner toutes les lignes.

-On pourra admettre que $\lambda^4 - 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda+2)(\lambda-2)$.

4) (1 Point) En déduire l'ensemble des valeurs propres de g et leur multiplicité.

On rappelle que le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(g - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^4})$ est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$ tels que

$$g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

On rappelle aussi que si λ est une valeur propre de g de multiplicité 1, $\text{Ker}(g - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^4})$ est de dimension 1.

5) (1 Point) Donner une base de $\text{Ker } (g - 2id_{\mathbb{R}^4})$, le noyau de l'application obtenue en retranchant à g , deux fois l'application identité de $\mathbb{R}^4$.

6) (3 Points) Donner une base de $\text{Ker } (g + 2id_{\mathbb{R}^4})$, le noyau de l'application obtenue en additionnant à g , deux fois l'application identité de $\mathbb{R}^4$.

7) (4 Points) Donner une base de $\text{Ker } g$, le noyau de l'application g .

8) (2 Points) A l'aide des questions précédentes, donner une base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ de $\mathbb{R}^4$ telle que $g(\vec{v}_1) = -2\vec{v}_1$, $g(\vec{v}_2) = 2\vec{v}_2$, $g(\vec{v}_3) = \vec{0}$ et $g(\vec{v}_4) = \vec{0}$.

Partie II : Calcul de la puissance n -ième de la matrice

Pour tout entier $n \geq 1$, notons par g^n la composée n fois de g , $g \circ \dots \circ g$: c'est à dire $g^1 = g$, $g^2 = g \circ g$, $g^3 = g \circ g \circ g$, ...

Par récurrence, on montre facilement que $g^n(\vec{v}_1) = (-2)^n \vec{v}_1$, $g^n(\vec{v}_2) = 2^n \vec{v}_2$, $g^n(\vec{v}_3) = \vec{0}$, et $g^n(\vec{v}_4) = \vec{0}$. Comme g^n est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$, pour tout réels a , b , c et d , on a l'égalité.

$$g^n(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 + d\vec{v}_4) = a(-2)^n \vec{v}_1 + b2^n \vec{v}_2.$$

9) (2 Points) Soit $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ la base de $\mathbb{R}^4$ que vous avez trouvé à la question 8).

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$. Les coordonnées de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ sont par définition les nombres réels a , b , c et d tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 + d\vec{v}_4.$$

Calculez-les !

10) (2 Points) En déduire que

$$g^n \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right) = 2^{n-2} \begin{pmatrix} (1 + (-1)^n)x + (1 + (-1)^n)y + (1 - (-1)^n)z + (1 - (-1)^n)t \\ (1 + (-1)^n)x + (1 + (-1)^n)y + (1 - (-1)^n)z + (1 - (-1)^n)t \\ (1 - (-1)^n)x + (1 - (-1)^n)y + (1 + (-1)^n)z + (1 + (-1)^n)t \\ (1 - (-1)^n)x + (1 - (-1)^n)y + (1 + (-1)^n)z + (1 + (-1)^n)t \end{pmatrix}.$$

11) (1 Point) En déduire B^n , la puissance n -ième de la matrice B (On rappelle que B est la matrice de g).