

Examen : Lundi 20/01/14, 8h00-10h00.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Aucun document n'est autorisé. Le corrigé sera disponible sur la page web www.menichi.com.

Problème

Partie I : Diagonalisation On considère l'application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x - 3y + 3z \\ 3x - 5y + 3z \\ 6x - 6y + 4z \end{pmatrix}.$$

- 1) (1 Points) Donner B la matrice de g .
- 2) (5 Points) Montrer que pour tout réel λ ,

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5 - \lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(\lambda + 2)^2.$$

On pourra admettre que $-\lambda^3 + 12\lambda + 16 = (4 - \lambda)(\lambda + 2)^2$.

- 3) (2 Points) Donner l'ensemble F des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- 4) (3 Points) Donner une base de $\text{Ker}(g + 2id_{\mathbb{R}^3})$, le noyau de l'application obtenue en additionnant à g , deux fois l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

- 5) (2 Points) Donner l'ensemble G des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- 6) (2 Points) Donner une base de $\text{Ker}(g - 4id_{\mathbb{R}^3})$, le noyau de l'application obtenue en retranchant à g , quatre fois l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

- 7) (2 Points) A l'aide des questions précédentes, donner une base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $g(\vec{v}_1) = -2\vec{v}_1$, $g(\vec{v}_2) = -2\vec{v}_2$ et $g(\vec{v}_3) = 4\vec{v}_3$.

Partie II : Calcul de la puissance n -ième de la matrice

Pour tout entier $n \geq 1$, notons par g^n la composée n fois de g , $g \circ \dots \circ g$: c'est à dire $g^1 = g$, $g^2 = g \circ g$, $g^3 = g \circ g \circ g$, ...

Par récurrence, on montre facilement que $g^n(\vec{v}_1) = (-2)^n \vec{v}_1$, $g^n(\vec{v}_2) = (-2)^n \vec{v}_2$ et $g^n(\vec{v}_3) = 4^n \vec{v}_3$. Comme g^n est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, pour tout réels a , b et c , on a l'égalité.

$$g^n(av_1 + bv_2 + cv_3) = a(-2)^n v_1 + b(-2)^n v_2 + c4^n v_3.$$

8) (2 Points) Soit $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ que vous avez trouvé à la question 7). Soit

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Les coordonnées de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ sont par définition les nombres réels a , b , et c telle que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3.$$

Calculez-les !

9) (2 Points) En déduire que

$$g^n \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{(-2)^n + 4^n}{2} x + \frac{(-2)^n - 4^n}{2} y + \frac{4^n - (-2)^n}{2} z \\ \frac{4^n - (-2)^n}{2} x + \frac{3(-2)^n - 4^n}{2} y + \frac{4^n - (-2)^n}{2} z \\ (4^n - (-2)^n)x + ((-2)^n - 4^n)y + 4^n z \end{pmatrix}.$$

10) (1 Points) En déduire B^n , la puissance n -ième de la matrice B (On rappelle que B est la matrice de g).