Examen : Mercredi 30/01/13, 10h-12h.

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Aucun document n'est autorisé.

Problème

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = x + 2y + 4z.$$

1) Montrer que f est linéaire.

2) Montrer que le sous-ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 4z = 0 \right\}$ est un sous-

espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3) Montrer que les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base de F . En déduire la dimension de F .

On considère l'application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + 2y + 4z \\ \frac{x}{2} + y + 2z \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + z \end{pmatrix}.$$

On rappelle que les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment la base canonique de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}$.

4) Donner $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g)$ la matrice de g relativement à la base canonique $\mathcal{B}$.

5) Donner une base de $\text{Ker } g$, le noyau de g .

6) Donner l'ensemble G des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

7) Donner une base de $\text{Ker } (g - 3\text{id}_{\mathbb{R}^3})$, le noyau de l'application obtenue en retranchant à g , trois fois l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

On considère l'application linéaire $h : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par tout vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$h \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2a - 4b + 4c \\ a + 2c \\ b + c \end{pmatrix}.$$

- 8) Montrer que h est bijectif et calculer sa bijection réciproque h^{-1} .
9) Montrer que les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}'$.

- 10) Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$.
11) Donner $M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(g)$ la matrice de g relativement à la base $\mathcal{B}'$.