

Apout au Corrigé

Examen 1<sup>re</sup> session 2015

1°) 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 est la matrice B

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
 est le déterminant de la matrice B

donc un nombre (-4 d'après 3°)

3°) Lorsqu'on calcule un déterminant, on doit pouvoir les opérations une par une (ou parait pouvoir faire les opérations dans l'autre sens et revenir). Par exemple

FAUX

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & L_1 \\ 4 & 5 & 6 & L_2 \\ 7 & 8 & 9 & L_3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & L_1 \\ -3 & -3 & -3 & L_2 - L_3 \\ 3 & 3 & 3 & L_3 - L_2 \end{array}$$

VRAI

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & L_1 \\ 4 & 5 & 6 & L_2 \\ 7 & 8 & 9 & L_3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & L_1 = L'_1 \\ -3 & -3 & -3 & L_2 - L'_3 = L'_2 \\ 7 & 8 & 9 & L_3 = L'_3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & L'_1 \\ -3 & -3 & -3 & L'_2 \\ 10 & 11 & 12 & L'_3 - L'_2 \end{array}$$

2<sup>ème</sup> méthode: Le pivot de Gauss marche toujours! (2)

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} -\lambda & 0 & 1 & 1 & L_1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 & L_2 \\ \boxed{1} & 1 & -\lambda & 0 & L_3 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda & L_4 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -\lambda & 0 & L_1 = L_3 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 & L_2 = L_2 \\ -\lambda & 0 & 1 & 1 & L_3 = L_3 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda & L_4 = L_4 \end{array} \right]$$

on prend 1 comme pivot

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -\lambda & 0 & L_1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 & L_2 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda^2 & 1 & L_3 + \lambda L_1 \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda & L_4 - L_1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} \boxed{-\lambda} & 1 & 1 & & L_2 \\ \lambda & 1-\lambda^2 & 1 & & L_3 \\ 0 & \lambda & -\lambda & & L_4 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} -\lambda & 1 & 1 & L_2 \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2 & L_3 + L_2 \\ 0 & \lambda & -\lambda & L_4 \end{array} \right] = (+\lambda) \lambda \left[ (2-\lambda^2) + \lambda \right] - 2\lambda$$

$$= \lambda \times \lambda \times \left[ (\lambda^2 - 2) - 2 \right] = \lambda^2 (\lambda^2 - 4) = \lambda^2 (\lambda - 2) (\lambda + 2)$$

5) 2<sup>ème</sup> méthode: Le pivot de Gauss marche toujours!

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + t = 0 & L_1 \\ -2y + y + t = 0 & L_2 \\ \boxed{x} + y - 2z = 0 & L_3 \\ x + y - 2t = 0 & L_4 \end{cases}$$

Je prend le même pivot qu'au 3<sup>o</sup>) et

je fais les mêmes calculs dans le cas  $\lambda = 2$

(3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 & L_3 = L'_1 \\ -2y + z + t = 0 & L_2 = L'_2 \\ -2x + y + t = 0 & L_1 = L'_3 \\ x + y - 2t = 0 & L_4 = L'_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 & L_1 \\ -2y + z + t = 0 & L_2 \\ 2y - 3z + t = 0 & L_3 + 2L_1 = L_3 + \lambda L_1 \\ 2z - 2t = 0 & L_4 - L_1 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 & L_1 & L'_1 \\ -2y + z + t = 0 & L_2 & L'_2 \\ -2z + 2t = 0 & L_3 + L_2 & L'_3 \\ 2z - 2t = 0 & L_4 & L'_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 & L_1 \\ -2y + z + t = 0 & L_2 \\ -2z + 2t = 0 & L_3 \\ 0 = 0 & L_4 - L_3 \end{cases}$$

le pivot de Gauss est terminé, on résout

par substitution maintenant en commençant par la fin (4)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - y = t \\ y = \frac{y+t}{2} = t \\ z = t \end{cases}$$

Donc  $\text{Ker}(g - 2\text{id}_{\mathbb{R}^4})$  est l'ensemble des vecteurs

de  $\mathbb{R}^4$  de la forme  $\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix}$  où  $t \in \mathbb{R}$

•  $t = 1$  donne  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(g - 2\text{id}_{\mathbb{R}^4})$

• Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  tq  $\alpha \vec{v}_2 = \vec{0}$  donc  $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  donc  $\alpha = 0$  donc  $\vec{v}_2$  famille libre

• générateur à faire

Cela ne rapportait qu'un point car il y avait une méthode beaucoup plus rapide grâce au 2°.  
Même façon de même pour le 5° et le 6°.

6°  
2<sup>ème</sup> méthode : la pivot de Gauss marche aussi !

(5)

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z + y + t = 0 \\ 2y + z + t = 0 \\ \boxed{x} + y + 2z = 0 \\ x + y + 2t = 0 \end{cases}$$

Je prend le même point qu'au 3° et au 5°  
car je fais les calculs dans le cas  $\lambda = -2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y + 2z = 0 & L_1 \\ 2y + z + t = 0 & L_2 \\ 2z + y + t = 0 & L_3 \\ x + y + 2t = 0 & L_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 & L_1 \\ 2y + z + t = 0 & L_2 \\ -2y - 3z + t = 0 & L_3 - 2L_1 \\ -2y + 2t = 0 & L_4 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 & L_1 \\ 2y + z + t = 0 & L_2 \\ -2y + 2t = 0 & L_3 + L_2 \\ \cancel{-2y + 2t = 0} \end{cases}$$

le point de Gauss est terminé

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + y = -t \\ y = \frac{-y-t}{2} = -t \\ z = t \end{cases}$$

donc  $\text{Ker}(g + 2\text{id}_{\mathbb{R}^4})$  est l'ensemble des vecteurs de  $\mathbb{R}^4$  de la forme  $\begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \\ t \end{pmatrix}$  où  $t \in \mathbb{R}$ .

•  $t = 1$  donne  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(g + 2\text{id}_{\mathbb{R}^4})$

• Soit  $\vec{u} \in \text{Ker}(g + 2\text{id}_{\mathbb{R}^4})$  alors il existe un réel  $t$  tel que  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc  $\vec{v}_1$  famille génératrice de  $\text{Ker}(g + 2\text{id}_{\mathbb{R}^4})$

• Alors à faire

7°) 2<sup>ème</sup> méthode : la matrice de Gauss marche aussi

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + t = 0 \\ y + t = 0 \\ 2x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$



Je prend le même point qu'au 3° 5° et 6°  
car je fais les calculs dans le cas  $\lambda = 0$

(7)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + t = 0 \\ y + t = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 & L'_1 \\ y + t = 0 & L'_2 \\ y + t = 0 & L'_3 \\ 0 = 0 & L'_4 - L'_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + t = 0 \\ 0 = 0 & L'_3 - L'_2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ y = -t \end{cases}$$

point de Gauss terminé

après on fait comme dans le corrigé

Conclusion : Le point de Gauss marche toujours  
mais n'est pas forcément le plus rapide  
comparé avec le corrigé

3°) 2<sup>ème</sup> méthode  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  déconseillé, 1<sup>ère</sup> méthode meilleure car  
D'après 6°,  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est une famille libre de vecteurs  
de  $\text{Ker}(g + 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})$   
D'après 5°,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est une famille libre de vecteurs  
de  $\text{Ker}(g - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})$

D'après 7°,  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  famille libre  
de vecteurs de  $\text{Ker } g$ .

Donc d'après le théorème sur la réunion de familles  
libres de vecteurs de sous-espaces propres,  
 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^4$ .

Comme  $\mathbb{R}^4$  est de dimension 4, et que la famille libre  
comporte 4 vecteurs, cette famille est une base.

Remarque:  $\triangle$  En général, la réunion de familles  
libres de vecteurs pris dans des sous-espaces vectoriels  
différents n'est pas libre: cela ne marche que  
pour les sous-espaces propres.

Par exemple Soient  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$   
deux vecteurs et  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$  famille libre du sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } y = 0 \right\}$$

$\vec{v}_3$  famille libre du sous-espace vectoriel

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } y = 0 \text{ et } x - y = 0 \right\}$$

Toutefois  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  n'est pas libre.

Toute annonce imprecise est donc fautive. Il est préférable de  
montrer directement que la famille est libre.