

Corrige Examen 1^{ère} session 2015

Exo 139 Blamloel

1)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2)

$$g \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc 2 est une valeur propre de g et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur propre

3)

$$\begin{array}{c|cccc|l} -\lambda & 0 & 1 & 1 & L_1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 & L_2 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 & L_3 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda & L_4 \end{array} = \begin{array}{c|cccc|l} 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda & L_1+L_2+L_3+L_4 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 & L_2 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 & L_3 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda & L_4 \end{array}$$

(2)

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} L'_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \\ L'_4 \end{matrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L'_1 \\ L'_2 \\ L'_3 - L'_2 \\ L'_4 - L'_1 \end{matrix}$$

matrice triangulaire par blocs

$$= (2-\lambda) \times |1| \times |-\lambda| \times \begin{vmatrix} -\lambda-1 & -1 \\ -1 & -\lambda-1 \end{vmatrix} \\ = (\lambda-2) \lambda \times |(\lambda+1)^2 - 1| = \lambda(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda+1-1) \\ = \lambda^2(\lambda+2)(\lambda-2)$$

- 4) donc les valeurs propres de g sont
- 0 de multiplicité 2
 - -2 de multiplicité 1
 - 2

- 5) donc $\text{Ker}(g - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})$ est de dimension 1.

D'après 2) $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(g - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})$

$\alpha \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ car $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ donc $\vec{v}_2$ famille liée à 1 vecteur

de $\text{Ker}(g - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})$ qui est de dimension 1

donc $\vec{v}_2$ base de $\text{Ker}(g - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})$

6) Comme -2 est multiple de 1,
donc $\text{Ker}(g + 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4}) = 1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \text{Ker}(g + 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4}) \Leftrightarrow g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + t = 0 & L_1 \\ 2y + y + t = 0 & L_2 \\ x + y + 2z = 0 & L_3 \\ x + y + 2t = 0 & L_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + t = 0 & L_1 \\ -2x + 2y = 0 & L_2 - L_1 \\ x + y + 2z = 0 & L_3 \\ -2y + 2t = 0 & L_4 - L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + t = 0 \\ y = x \\ x + y + 2z = 0 \\ t = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + y = 0 \\ y = x \\ x + x + 2z = 0 \\ t = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ y = x \\ t = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \\ t = -x \end{cases}$$

donc $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(g + 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})$

on procède comme au 5) donc
 $\vec{v}_1$ base de $\text{Ker}(g + 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})$

$$7) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \text{Ker } g \Leftrightarrow \begin{cases} y+t=0 \\ \cancel{y+t}=0 \\ x+y=0 \\ \cancel{x+y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-z \\ t=-y \end{cases}$$

donc $\text{Ker } g$ est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^4$

de la forme $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ y \\ -y \end{pmatrix}$ où x et $y \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{matrix} x=1 \\ y=0 \end{matrix} \right\} \text{ donne } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker } g$$

$$\left. \begin{matrix} x=0 \\ y=1 \end{matrix} \right\} \text{ donne } \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } g$$

Soient $\alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_3 \vec{v}_3 + \alpha_4 \vec{v}_4 = \vec{0}$

$$\text{alors } \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ -\alpha_3 \\ \alpha_4 \\ -\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \text{ donc}$$

$\vec{v}_3, \vec{v}_4$ famille libre

Soit $\vec{u} \in \text{Ker } g$ alors ils existent x et $y \in \mathbb{R}$

$$\text{tel que } \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ y \\ -y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = x \vec{v}_3 + y \vec{v}_4$$

(5)

donc $\vec{v}_3, \vec{v}_4$ famille génératrice de $\text{Ker } g$

donc $(\vec{v}_3, \vec{v}_4)$ famille libre et génératrice de $\text{Ker } g$

donc base de $\text{Ker } g$

8) Soit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, d'après 6) $g(\vec{v}_1) = -2\vec{v}_1$

Soit $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'après 2) $g(\vec{v}_2) = 2\vec{v}_2$

Soit $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'après 7)

$g(\vec{v}_3) = g(\vec{v}_4) = \vec{0}$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 + \alpha_4 \vec{v}_4 = \vec{0}$

donc
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 & L_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 & = 0 & L_2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 & = 0 & L_3 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 & = 0 & L_4 \end{cases}$$

donc
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 & L_1 \\ -2\alpha_3 & = 0 & L_2 - L_1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 & = 0 & L_3 \\ -2\alpha_4 & = 0 & L_4 - L_3 \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 & L_1' \\ \alpha_3 = 0 & L_2' \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 & L_3' \\ \alpha_4 = 0 & L_4' \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} 2\alpha_2 = 0 & L_1' + L_3' \\ \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 = 0 & L_3' - L_1' \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

donc $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ famille liée à 4
vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4

donc base de $\mathbb{R}^4$

on procède comme au 8)

$$g) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 + d\vec{v}_4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = x & L_1 \\ a + b - c = y & L_2 \\ -a + b + d = z & L_3 \\ -a + b - d = t & L_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = x & L_1 \\ -2c = y - x & L_2 - L_1 \\ -a + b + d = z & L_3 \\ -2d = t - z & L_4 - L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = z + \frac{y-z}{2} = \frac{x+y}{2} & L'_1 \\ c = \frac{x-y}{2} \\ -a+b = y-d = y + \frac{t-y}{2} = \frac{y+t}{2} & L'_3 \\ d = \frac{y-t}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b = \frac{x+y+y+t}{2} & L'_1 + L'_3 \\ c = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a = \frac{y+t}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right) & L'_3 - L'_1 \\ d = \frac{y-t}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x+y-y-t}{4} \\ b = \frac{x+y+y+t}{4} \\ c = \frac{x-y}{2} \\ d = \frac{y-t}{2} \end{cases}$$

10/

d'après 9/

$$\begin{array}{c|c|c|c} g & x & y & t \\ \hline & x & y & t \\ \hline & & & \end{array} = \frac{x+y-y-t}{4} (-2)^{n-1} \vec{v}_1 + \frac{x+y+y+t}{4} 2^n \vec{v}_2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2^m}{4} \left[(x+y-z-t)(-1)^m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + (x+y+z+t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\
 &= 2^{n-2} \left(\frac{x((-1)^m+1) + y((-1)^m+1) + z(-(-1)^m+1) + t(-(-1)^m+1)}{x(-(-1)^m+1) + y(-(-1)^m+1) + z((-1)^m+1) + t((-1)^m+1)} \right)
 \end{aligned}$$

$$B^n = 2^{n-2} \begin{pmatrix} 1+(-1)^m & 1+(-1)^m & 1-(-1)^m & 1-(-1)^m \\ 1+(-1)^m & 1+(-1)^m & 1-(-1)^m & 1-(-1)^m \\ 1-(-1)^m & 1-(-1)^m & 1+(-1)^m & 1+(-1)^m \\ 1-(-1)^m & 1-(-1)^m & 1+(-1)^m & 1+(-1)^m \end{pmatrix}$$