

Corrigé Examen 1^{ère} session 2014

Exemple 7.19 Blanlool

$$1) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad \text{1^{ère} méthode: rucée} \quad \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1-\lambda & -3 & 3 & C_1+C_2 & C_2 & C_3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 & -2-\lambda & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda & -2-\lambda & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda & 0 & -6 & 4-\lambda \end{array} \right|$$

$$= (-2-\lambda) \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 3 & & & \\ 1 & -5-\lambda & 3 & & & \\ 0 & -6 & 4-\lambda & & & \end{array} \right|$$

$$= (-2-\lambda) \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 3 & L_1 & & \\ 0 & -2-\lambda & 0 & L_2-L_1 & & \\ 0 & -6 & 4-\lambda & L_3 & & \end{array} \right|$$

(2)

$$= (-2-\lambda) \times 1 \times \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda) \times (-2-\lambda) \times (4-\lambda)$$

2^{ème} méthode

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -5-\lambda & 3 \\ 1-\lambda & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 3 & -5-\lambda & 3 \\ 0 & -3+\frac{(\lambda-1)}{3}(5+\lambda) & 3+\frac{(\lambda-1)}{3} \times 3 \\ 0 & -6+2(5+\lambda) & 4-\lambda-6 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 + \frac{(\lambda-1)}{3} L_1 \\ L_3 - 2 L_1 \end{matrix}$$

$$= -3 \times \begin{vmatrix} -3 - \frac{\lambda^2 + 4\lambda - 5}{3} & \lambda + 2 \\ 4 + 2\lambda & -\lambda - 2 \end{vmatrix}$$

(3)

$$= -3 \times (\lambda + 2) \begin{vmatrix} \frac{-\lambda^2 - 4\lambda - 4}{3} & 1 \\ 4 + 2\lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \times (\lambda + 2) \times \left(\frac{-\lambda^2 - 4\lambda - 4}{3} \times -1 - 4 - 2\lambda \right)$$

$$= -3 (\lambda + 2) \times \frac{\lambda^2 + 4\lambda + 4 - 12 - 6\lambda}{3}$$

$$= -(\lambda + 2) (\lambda^2 - 2\lambda - 8) = -(\lambda + 2)(\lambda - 4)(\lambda + 2)$$

$$\Delta = 4 + 4 \times 8 = 36 \quad \text{pour } \frac{2-6}{2} = -2 \text{ et } \frac{2+6}{2} = 4$$

$$3) \quad g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y + 3z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \\ 6x - 6y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x - y + z = 0$$

F est l'ensemble des éléments $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$

tel que $x - y + z = 0$

c'est un plan.

4) $\text{Ker}(g + 2 \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = F$ est d'après 3)
l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^3$ de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} \text{ où } x \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$

$$x=1 \quad y=0 \text{ donne } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$$

$$x=0 \quad y=1 \text{ donne } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in F$$

Tout élément de F a eut sous la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x \vec{v}_1 + y \vec{v}_2$$

donc $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ famille génératrice de F

Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$

$$\text{Alors } \left(\begin{array}{c|c|c} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \end{array} \right) \text{ c.à.d. } \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

donc $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ donc $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ famille libre

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ famille libre et génératrice de F

donc base de F

(5)

$$5) \quad g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 3y + 3z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3y - 3y + 3z = 0 \\ 3y - 3y + 3z = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6y + 3z = 0 \\ -6y + 3z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y \\ x = y \end{cases}$$

G est l'ensemble des éléments $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $z = 2y$ et $x = y$

G est une droite

$$6) \text{ D'après 5) } G = \text{Ker}(g - 4 \text{id}_{\mathbb{R}^3})$$

est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^3$ de la forme $\begin{pmatrix} y \\ y \\ 2y \end{pmatrix}$ où $y \in \mathbb{R}$

$$y = 1 \text{ donne } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in G$$

Tout élément de G s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = y \vec{v}_3$$

Donc la famille constituée du seul vecteur $\vec{v}_3$ est une famille génératrice de G

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \vec{v}_3 = \vec{0}$

$$\alpha \vec{v}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 0$$

donc la famille constituée du seul vecteur $\vec{v}_3$ est une famille libre.

$(\vec{v}_3)$ famille libre et génératrice de F
donc base de F

7) 1^{ère} méthode

$$\left. \begin{array}{l} (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \text{ famille libre de } \text{Ker}(g + 2 \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \\ (\vec{v}_3) \text{ famille libre de } \text{Ker}(g - 4 \text{id}_{\mathbb{R}^4}) \end{array} \right\}$$

Donc d'après le théorème sur la réunion de famille

libres de sous-espaces propres,

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une famille libre

2^{ème} méthode

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$

Alors
$$\begin{cases} \boxed{\alpha_1} + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 & L_1 \\ \alpha_2 = 0 & L_2 - L_1 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

donc $\alpha_1 = 0$
 $\alpha_2 = 0$
 $\alpha_3 = 0$. Donc $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ famille liée

Avec l'une des 2 méthodes, $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ famille liée à 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$

8)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \vec{v}_1 + b \vec{v}_2 + c \vec{v}_3 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = x \\ a + b + c = y \\ b + 2c = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = x & L_1 \\ b = y - x & L_2 - L_1 \\ y - x + 2c = z \end{cases}$$

Gauss qui au 7) 2^{ème} méthode on fait le même pivot de

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x - c}{2} \\ b = -x + y \\ c = \frac{x - y + z}{2} \end{cases}$$

9) d'après 8)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x+y-z}{2} \vec{v}_1 + \frac{-x+y}{2} \vec{v}_2 + \frac{x-y+z}{2} \vec{v}_3$$

Donc d'après l'égalité donnée au début du II

$$g^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x+y-z}{2} (-2)^n \vec{v}_1 + \frac{-x+y}{2} (-2)^n \vec{v}_2 + \frac{x-y+z}{2} 4^n \vec{v}_3$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x+y-z}{2} (-2)^n + \frac{x-y+z}{2} 4^n \\ \frac{x+y-z}{2} (-2)^n + (-x+y) (-2)^n + \frac{x-y+z}{2} 4^n \\ (-x+y) (-2)^n + \frac{x-y+z}{2} x \cdot 4^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x}{2} [(-2)^n + 4^n] + \frac{y}{2} [(-2)^n - 4^n] + \frac{z}{2} [4^n - (-2)^n] \\ \frac{x}{2} [4^n - (-2)^n] + \frac{y}{2} [3 \times (-2)^n - 4^n] + \frac{z}{2} [4^n - (-2)^n] \\ x [4^n - (-2)^n] + y [(-2)^n - 4^n] + z 4^n \end{pmatrix}$$

10)

$$B^n = \begin{pmatrix} \frac{(-2)^n + 4^n}{2} & \frac{(-2)^n - 4^n}{2} & \frac{4^n - (-2)^n}{2} \\ \frac{4^n - (-2)^n}{2} & \frac{3 \times (-2)^n - 4^n}{2} & \frac{4^n - (-2)^n}{2} \\ 4^n - (-2)^n & (-2)^n - 4^n & 4^n \end{pmatrix}$$

2) Développement par rapport à la 1^{ère} colonne pas en en coin

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -5-\lambda & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) [(\lambda+5)(\lambda-4) + 18] - 3(3(\lambda-4) + 18) + 6(-9 + 3(\lambda+5))$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) - 3(3\lambda + 6) + 6(6 + 3\lambda)$$

1^{ère} méthode

$$= (1-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-1) - 9(\lambda+2) + 18(2+\lambda)$$

$$= (\lambda+2) [-(\lambda-1)^2 + 9]$$

$$= (\lambda+2) (3 - \lambda + 1) (3 + \lambda - 1) = (4-\lambda)(\lambda+2)^2$$

2^{ème} méthode

$$= \cancel{\lambda^2} + \lambda - 2 - \lambda^3 - \cancel{\lambda^2} + 2\lambda - 9\lambda - 18 + 36 + 18\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 12\lambda + 16$$

ou dans copie de Cormery

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1-\lambda \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 4-\lambda & -6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & 2+\lambda \\ 0 & \frac{-18+3(4-\lambda)}{3} & \frac{18-(\lambda-4)(\lambda-1)}{6} \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - \frac{4-\lambda}{3} L_1 \end{matrix}$$

$$= -(\lambda+2) \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1-\lambda \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{-6-3\lambda}{3} & \frac{-\lambda^2+5\lambda+14}{3} \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+2) \times \cancel{\beta} \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{-6-3\lambda}{\cancel{\beta}} & \frac{-\lambda^2+5\lambda+14}{\cancel{\beta}} \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+2) (\lambda^2 - 5\lambda - 14 + 6 + 3\lambda) = -(\lambda+2) (\lambda^2 - 2\lambda - 8)$$

$$= -(\lambda+2) (\lambda+2) (\lambda-4)$$