

21h38

1) Soient α et α' deux réels Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\beta\left(\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \alpha'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = \beta\begin{pmatrix} \alpha x + \alpha' x' \\ \alpha y + \alpha' y' \\ \alpha z + \alpha' z' \end{pmatrix} = \alpha x + \alpha' x' + 2(\alpha y + \alpha' y') + 4(\alpha z + \alpha' z')$$

$$= \alpha(x + 2y + 4z) + \alpha'(x' + 2y' + 4z')$$

$$= \alpha \beta\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \alpha' \beta\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

21h43

2) 1^{ère} méthode

$$0 + 2 \times 0 + 4 \times 0 = 0 \text{ donc } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F \text{ donc } F \text{ est non vide}$$

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs appartenant à F .
Soient $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$

$$\text{donc } x + 2y + 4z = 0 \text{ et } x' + 2y' + 4z' = 0$$

$$\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \alpha'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \alpha' x' \\ \alpha y + \alpha' y' \\ \alpha z + \alpha' z' \end{pmatrix}$$

$$\alpha x + \alpha' x' + 2(\alpha y + \alpha' y') + 4(\alpha z + \alpha' z') = \alpha(x + 2y + 4z) + \alpha'(x' + 2y' + 4z') = \alpha \times 0 + \alpha' \times 0 = 0$$

$$\text{donc } \alpha\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \alpha'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in F. \text{ donc } F \text{ est stable par}$$

par combinaison linéaire.

21h48

2^{ème} méthode Comme f est linéaire, $F = \text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

3^o

$$-2 + 2 \times 1 + 4 \times 0 = 0 \text{ donc } \vec{v}_1 \in F$$

$$-4 + 2 \times 0 + 4 \times 1 = 0 \text{ donc } \vec{v}_2 \in F$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$

$$\text{alors } \begin{cases} -2\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \\ 1\alpha_1 + 0\alpha_2 = 0 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 = 0 \end{cases} \text{ donc } \alpha_1 = 0 \text{ et } \alpha_2 = 0$$

donc $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ famille libre de F

$$\text{Soit } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \text{ alors } x + 2y + 4z = 0$$

$$\text{donc } x = -2y - 4z \text{ donc } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - 4z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \vec{v}_1 + z \vec{v}_2$$

donc $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ famille génératrice de F

$\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ famille libre et génératrice de F donc base de F

$$\text{donc } \dim F = 2$$

4/

$$M_{B,p}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

6/

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in G \iff \begin{cases} x + 2y + 4z = 3x & L_1 \\ \frac{1}{2}x + y + 2z = 3y & L_2 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + z = 3z & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 4z = 3x & L_1 \\ x + 2y + 4z = 6y & 2L_2 \\ x + 2y + 4z = 12z & 4L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 4z = 3x \\ 3x = 6y \\ 3x = 12z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ x = 4z \\ \text{et. } x + x + x = 3x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2y \\ x = 4z \end{cases}$$

donc G est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\text{tel que } \begin{cases} x = 2y \\ x = 4z \end{cases}$$

c à d de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ x/2 \\ x/4 \end{pmatrix} \text{ ou } x \in \mathbb{R}$$

$$5) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } g \Leftrightarrow g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = 0$$

④

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 & L_1 \\ x/2 + y + 2z = 0 & L_2 \\ x/4 + y/2 + z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 & L_1 \\ x + 2y + 4z = 0 & 2L_2 \\ x + 2y + 4z = 0 & 4L_3 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y + z = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F$$

donc $F = \text{Ker } g$

donc $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ est une base de $\text{Ker } g$ d'après 3)

$$7) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(g - 3 \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \Leftrightarrow (g - 3 \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) - 3 \text{id}_{\mathbb{R}^3} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in G$$

donc $\text{Ker}(g - 3 \text{id})$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x \\ x/2 \\ x/4 \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$

donc $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(g - 3 \text{id})$

(5)

Soit $\vec{x} \in \text{Ker}(g - 3 \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^3})$

$$\text{alors } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ x/2 \\ x/4 \end{pmatrix} = \frac{x}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{x}{4} \vec{v}_3$$

donc $\vec{v}_3$ engendre $\text{Ker}(g - 3 \cdot \text{id})$
 $\vec{v}_3 \neq \vec{0}$ donc $\vec{v}_3$ famille libre de $\text{Ker } g - 3 \cdot \text{id}$

donc $\vec{v}_3$ base de $\text{Ker}(g - 3 \cdot \text{id})$

g) : h est une bijection car pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
 l'équation $h\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ d'inconnue $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

admet une unique solution / qui sera

$$h^{-1}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$$

$$h\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 4b + 4c = x & L_1 \\ \boxed{a} + 2c = y & L_2 \\ b + c = z & L_3 \end{cases}$$

prenons a comme pivot

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4b + 8c = x + 2y & L_1 + 2L_2 \\ a + 2c = y & L_2 \\ \boxed{b} + c = z & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = y \\ b + c = z \\ 12c = x + 2y + 4z & L_1 + 2L_2 + 4L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = y - 2c = y - \frac{2}{12}(x + 2y + 4z) = \frac{1}{12}(-2x + 8y - 8z) \\ b = y - c = y - \frac{1}{12}(x + 2y + 4z) = \frac{1}{12}(-x - 2y + 8z) \\ c = \frac{1}{12}(x + 2y + 4z) \end{cases}$$

donc h est linéaire

$$\text{et } h^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2x + 8y - 8z \\ -x - 2y + 8z \\ x + 2y + 4z \end{pmatrix}$$

9) Soit $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a \vec{v}_1 + b \vec{v}_2 + c \vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\text{c à d } h \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'après 8) comme h est linéaire et $h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

on a donc $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c à d $a = b = c = 0$

donc $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ famille libre à 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$
qui est de dimension 3 est une base de $\mathbb{R}^3$

10) Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Les coordonnées de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$

sont les nombres a, b, c telles que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \vec{v}_1 + b \vec{v}_2 + c \vec{v}_3 = h \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)$$

d'après 8)

(7)

Les coordonnées a, b, c sont données par

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = h^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2x + 8y - 8z \\ -x - 2y + 8z \\ x + 2y + 4z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 11) \quad g(\vec{v}_1) &= g \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 2 \times 1 \\ -1 + 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \vec{v}_1 + 0 \vec{v}_2 + 0 \vec{v}_3 \end{aligned}$$

de même $g(\vec{v}_2) = \vec{0}$ car $\vec{v}_2 \in \text{Ker } g$ ou calcul

$$= 0 \vec{v}_1 + 0 \vec{v}_2 + 0 \vec{v}_3$$

$$\begin{aligned} g(\vec{v}_3) &= 3 \vec{v}_3 \text{ car } \vec{v}_3 \in \text{Ker}(g - 3\text{id}) \text{ ou calcul} \\ &= 0 \vec{v}_1 + 0 \vec{v}_2 + 3 \vec{v}_3 \end{aligned}$$

donc $M_{B', B'}(g) =$

	$g(\vec{v}_1)$	$g(\vec{v}_2)$	$g(\vec{v}_3)$	
	0	0	0	$\vec{v}_1$
	0	0	0	$\vec{v}_2$
	0	0	3	$\vec{v}_3$

FIN

Application La diagonalisation de g permet
le calcul de la composée $g \circ g = g^2$

Si $n \geq 1$.

(8)

$$g^n(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3) = (g \circ g)(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3)$$

$$= a g^n(\vec{v}_1) + b g^n(\vec{v}_2) + c g^n(\vec{v}_3)$$

$$= a \times \vec{0} + b \times \vec{0} + c 3^n \vec{v}_3$$

donc Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Soit a, b, c les coordonnées

de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base β' donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3$

$$\text{donc } g^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g^n(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3) = c 3^n \vec{v}_3$$

$$= \frac{1}{12} (x + 2y + 4z) 3^n \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3^n}{12} \begin{pmatrix} 4x + 8y + 16z \\ 2x + 4y + 8z \\ z + 2y + 4z \end{pmatrix}$$

$$= 3^{n-1} \begin{pmatrix} x + 2y + 4z \\ \frac{1}{2}x + y + 2z \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + z \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } M_{\beta, \beta}(g^n) = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ est la puissance}$$

n-ème $M_{\beta, \beta}(g)^n$ de la matrice

$$M_{\beta, \beta}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque En fait dans cet exemple, g et g^n sont nulles car
 $\text{Im } g = \text{Ker}(g - 3\text{id})$