

Exercice 1

$$a) \begin{cases} -5x + 2y + 4z = 0 \\ 2x - 8y + 2z = 0 \\ 4x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{x} - 4y + z = 0 & L_2/2 \\ -5x + 2y + 4z = 0 & L_1 \\ 4x + 2y - 5z = 0 & L_3 \end{cases}$$

Je prend x comme pivot

$$\begin{cases} x - 4y + z = 0 & L_1 \\ -18y + 9z = 0 & L_2 + 5L_1 \\ \cancel{18y - 9z = 0} & L_3 - 4L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4y - z = 4y - 2y = 2y \\ y = 2y \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 2y \end{pmatrix}$ où $y \in \mathbb{R}$

b) Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$

②

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } g \Leftrightarrow g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5x + 2y + 4z \\ 2x - 8y + 2z \\ 4x + 2y - 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'après a)

$$\Leftrightarrow x = y = 2z$$

$$\text{donc } \text{Ker } g = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ où } y \in \mathbb{R} \right\}$$

c) 1^{re} méthode

d'après b) $\text{Ker } g \neq \{\vec{0}\}$ donc g n'est pas injectif

2^{ème} méthode

$$\text{d'après b)} \quad g\left(\begin{pmatrix} 2 \times 1 \\ 1 \\ 2 \times 1 \end{pmatrix}\right) = \vec{0} = g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ont même image par g

donc g n'est pas injectif

(3)

d) Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur quelconque fixe

$$g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 2y + 4z = a \\ 2x - 8y + 2z = b \\ 4x + 2y - 5z = c \end{cases}$$

Je recommence en faisant les mêmes opérations qu'à a)

$$\begin{cases} \boxed{x} - 4y + z = b/2 \\ -5x + 2y + 4z = a \\ 4x + 2y - 5z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + z = b/2 & L_1 \\ -18y + 9z = a + 5b/2 & L_2 + 5L_1 \\ 18y - 9z = c - 4b/2 & L_3 - 4L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + z = b/2 \\ -18y + 9z = a + 5/2 b \\ 0 = a + 5/2 b + c - 4b/2 & L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y - z = 2y - \frac{a + 5/2 b}{9} \\ y = 2y + \frac{a + 5/2 b}{9} \\ 0 = a + b/2 + c \end{cases}$$

Donc l'équation $g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

admet au moins une solution si et seulement

$$\text{si } a + \frac{b}{2} + c = 0$$

$$\text{donc } \text{Im } g = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } a + \frac{b}{2} + c = 0 \right\}$$

e) d'après d)

$$\text{Im } g \neq \mathbb{R}^3 \quad / \quad \text{Par exemple } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{Im } g$$

$$\text{car } 1 + \frac{1}{2} + 1 \neq 0$$

donc g n'est pas surjective

f) d'après c), g n'est pas surjective

donc pas bijectif. Donc la matrice m est non inversible.

(5)

Exercice II

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \quad x B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

22h30 Exercice III 1^{re} méthode: d'abord, addition des lignes

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad L_1 + L_2 + L_3 + L_4$$

$$= 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \end{array}$$

$$= 5 \times (-1) \times (-1) \begin{vmatrix} c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

matrice triangulaire

$$= 5 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 5$$

2^{eme} méthode par la Gauss

(6)

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & 2 & L_1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & L_2 - L_1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & L_3 - L_1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & L_4 - 2L_1 \end{array}$$

triangulaire par bloc

$$= |1| \times \begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{array} = - \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & -1 & L_2 \\ 0 & 1 & -1 & L_1 \\ -1 & -1 & -3 \end{array}$$

$$= \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & -1 & L_1 \\ 0 & 1 & -1 & L_2 \\ 0 & -1 & -4 & L_3 + L_1 \end{array} = -(-4 - 1) = 5$$

3^{ème} méthode : on échange les lignes (ou colonnes)

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} = \begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 1 & 1 & L_4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & L_3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & L_2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & L_1 \end{array}$$

on est ramené à l'Exercice 1 de la Série 3

Exercice IV

• $0 + 2 \times 0 = 0$ donc $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$ donc F est non vide

• Soient α et α' deux réels quelconques

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\vec{u}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de F

donc $x + 2y = 0$ et $x' + 2y' = 0$

$$\alpha \vec{u} + \alpha' \vec{u}' = \begin{pmatrix} \alpha x + \alpha' x' \\ \alpha y + \alpha' y' \end{pmatrix}$$

$$(\alpha x + \alpha' x') + 2(\alpha y + \alpha' y')$$

$$= \alpha(x + 2y) + \alpha'(x' + 2y') = \alpha \times 0 + \alpha' \times 0 = 0$$

donc $\alpha \vec{u} + \alpha' \vec{u}' \in F$

donc F est stable par combinaisons linéaires