

Corrigé Contrôle continue 2/12/13

1

Comparer avec l'exercice 5 Serie 1 pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.

Exercice I

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 0 & L_1 \\ 2x + y - 2z = 0 & L_2 \\ 2x + 2y - 3z = 0 & L_3 \end{cases} \quad \text{je choisis } L_2 \text{ comme pivot au II. a) aussi.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 & L_1 \\ x + 2y - 2z = 0 & L_2 \\ 2x + 2y - 3z = 0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 & L_1 \\ 3y - 2z = 0 & 2L_2 - L_1 \\ y - z = 0 & L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ 3y - 2z = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

donc $\text{Ker } f$ est égal au singleton $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\text{Ker } f = \{ \vec{0} \}$ donc d'après th du cours f injectif

c) Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

(2)

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im } f \Leftrightarrow$ Il existe $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tel que $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ l'équation $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a au moins une solution

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = a & L_1 \\ 2x + y - 2z = b & L_2 \\ 2x + 2y - 3z = c & L_3 \end{cases}$$

Je choisis le même point qu'à la a)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = b \\ x + 2y - 2z = a \\ 2x + 2y - 3z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = b & L_1 \\ 3y - 2z = 2a - b & 2L_1 - L_2 \\ \boxed{y} - z = c - b & L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = b & L_1 \\ y - z = c - b & L_2 \\ 3y - 2z = 2a - b & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = b & L_1 \\ y - z = c - b & L_2 \\ z = 2a - b - 3(c - b) & L_3 - 3L_2 \\ = 2a + 2b - 3c \end{cases}$$

L'équation $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet donc une unique solution car la dernière équation donne z , puis la deuxième donne y en fonction de z et la première x en fonction de y et de z .

Donc f est bijectif en particulier surjectif

c est à dire $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$

d) déjà fait au c)

e) On a vu au c) que f est bijectif
donc sa matrice A est inversible.

D'après c)

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{b}{2} - \frac{y}{2} + z \\ y = z - b + c \\ z = 2a + 2b - 3c \end{cases}$$

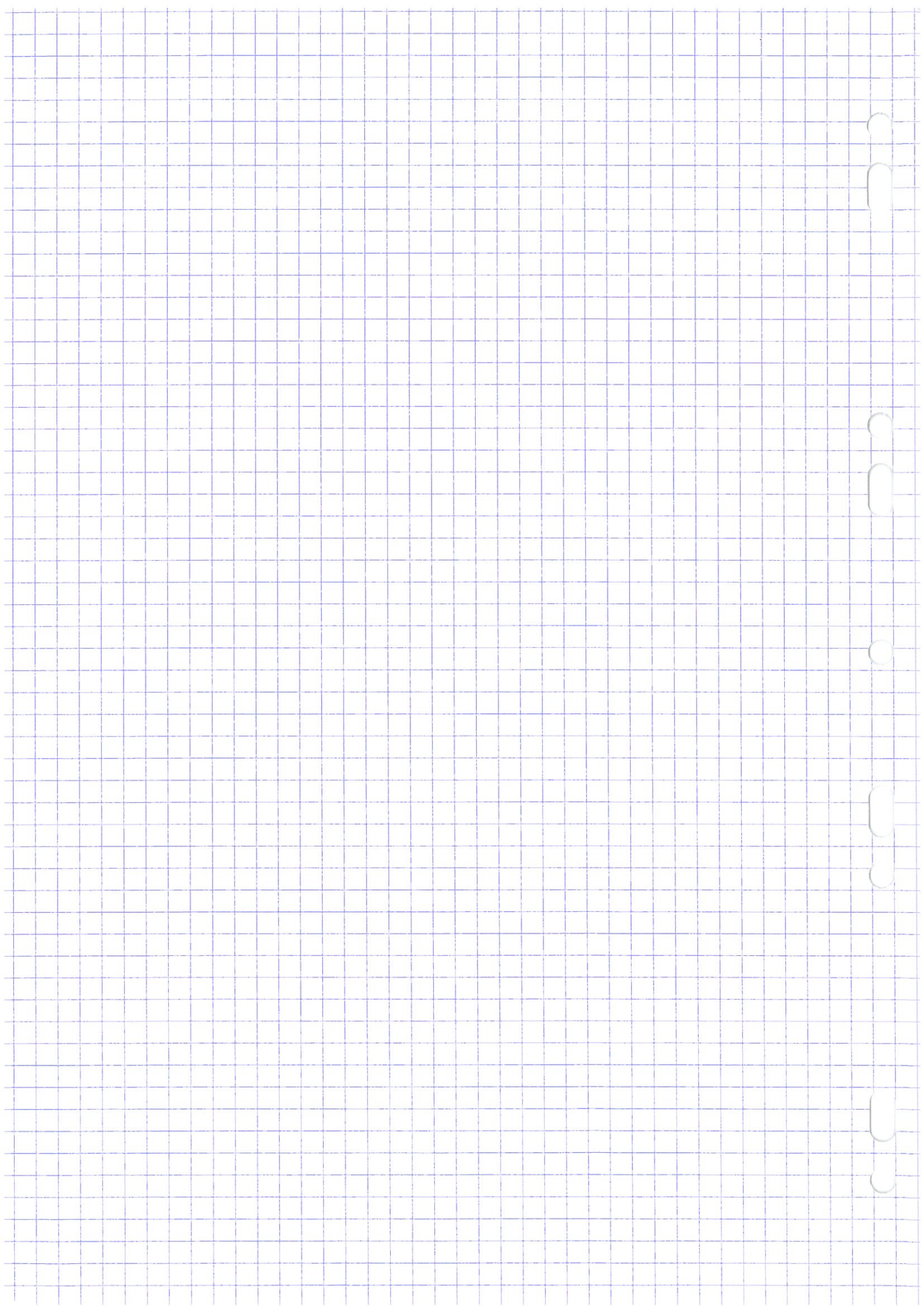
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{b}{2} - a - \frac{b}{2} + c + 2a + 2b - 3c = a + 2b - 2c \\ y = 2a + b - 2c \\ z = 2a + 2b - 3c \end{cases}$$

donc la bijection réciproque de f , $f^{-1}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + 2b - 2c \\ 2a + b - 2c \\ 2a + 2b - 3c \end{pmatrix}$$

Donc sa matrice B^{-1} est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$



Exercice II

4

$$a) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } g \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2z = 0 & L_1 \\ 2y - 2z = 0 & L_2 \\ 2x + 2y - 4z = 0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2z = 0 & L_1 \\ 2y - 2z = 0 & L_2 \\ 2y - 2z = 0 & L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

donc $\text{Ker } g$ est égal à l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de la forme $\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$

b) 1^{ère} méthode

$\text{Ker } g \neq \{\vec{0}\}$ donc g n'est pas injectif

2^{ème} méthode

D'après a) on calcule $g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \vec{0} = g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ont même image par g

donc g n'est pas injectif

$$c) \quad g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2z = a \\ 2x - 2z = b \\ 2x + 2y - 4z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2z = b \\ 2y - 2z = a \\ 2x + 2y - 4z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2z = b & L_1 \\ 2y - 2z = a & L_2 \\ 2y - 2z = c - b & L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z + b/2 \\ y = z + a/2 \\ a = c - b \end{cases}$$

Donc l'équation $g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet au moins une solution car $a = c - b$

$$\text{Im } g = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } a = c - b \right\}$$

d) d'après c) $\text{Im } g \neq \mathbb{R}^3$ / Par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{Im } g$
car $1 \neq 1 - 1$ / Donc g n'est pas surjective

e) D'après b) g n'est pas injective donc pas bijective. Donc sa matrice B n'est pas inversible.