**Agrocampus Angers** **2014-15**
**L2** **Algèbre**

**Examen : Lundi 01/12/14, 14h-15h30.**

Les calculettes ne sont pas autorisées. Aucun document n'est autorisé. Le corrigé sera disponible sur la page web `www.menichi.com`.

**Exercice I** (9 Points)

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

On considère l'application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ définie par tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -5x+2y+4z \\ 2x-8y+2z \\ 4x+2y-5z \end{pmatrix}.$$

On remarque que la matrice de $g$, $M(g)$, est la matrice $B$.

**a)** (2 Points) Résoudre :

$$\begin{cases} -5x & + & 2y & + & 4z & = & 0 \\ 2x & - & 8y & + & 2z & = & 0 \\ 4x & + & 2y & - & 5z & = & 0 \end{cases}$$

**b)** (1 Points) Déterminer Ker $g$, le noyau de l'application $g$.
**c)** (1 Point) L'application $g$ est-elle injective ?
**d)** (3 Points) Calculer Im $g$, l'image de $g$.
**e)** (1 Point) L'application $g$ est-elle surjective ?
**f)** (1 Point) La matrice $B$ est-elle inversible ? Si $B$ est inversible, donner son inverse $B^{-1}$.

**Exercice II** (2 Points)

Soit $A$ la matrice à une ligne et deux colonnes définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$. Soit $B$ la matrice à deux lignes et trois colonnes définie par $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

- Calculer le produit de matrices $AB$.

**Exercice III** (4 Points)

- Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Indication : on pourra
-soit commencer par additionner toutes les lignes,
-soit plus simplement faire la méthode du pivot de Gauss.

Dans les 2 cas, il faudra probablement échanger des lignes ou des colonnes. On rappelle que "Si on échange deux lignes (ou deux colonnes), le déterminant est multipliée par $-1$".

**Exercice IV** (5 Points)

- Montrer que le sous-ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Indication : explicitement, $F$ est la partie de $\mathbb{R}^2$ composée uniquement des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifient l'équation $x + 2y = 0$. Par exemple, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartient à $F$.