Agrocampus Angers | **2013-14**
L2 | **Algèbre**

Examen : Lundi 02/12/13, 8h15-9h45.

Les calculettes ne sont pas autorisées. Aucun document n'est autorisé.

Exercice I

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ définie par tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2y - 2z \\ 2x + y - 2z \\ 2x + 2y - 3z \end{pmatrix}.$$

On remarque que la matrice de f, $M(f)$, est la matrice A.

a) Déterminer Ker f, le noyau de l'application f.
b) L'application f est-elle injective ?
c) Calculer Im f, l'image de f.
d) L'application f est-elle surjective ?
e) La matrice A est-elle inversible ? Si A est inversible, donner son inverse A^{-1}.

Exercice II

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

On considère l'application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ définie par tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2y - 2z \\ 2x - 2z \\ 2x + 2y - 4z \end{pmatrix}.$$

On remarque que la matrice de g, $M(g)$, est la matrice B.

a) Déterminer Ker g, le noyau de l'application g.
b) L'application g est-elle injective ?
c) Calculer Im g, l'image de g.
d) L'application g est-elle surjective ?
e) La matrice B est-elle inversible ? Si B est inversible, donner son inverse B^{-1}.