

# Corrige Capes 2014

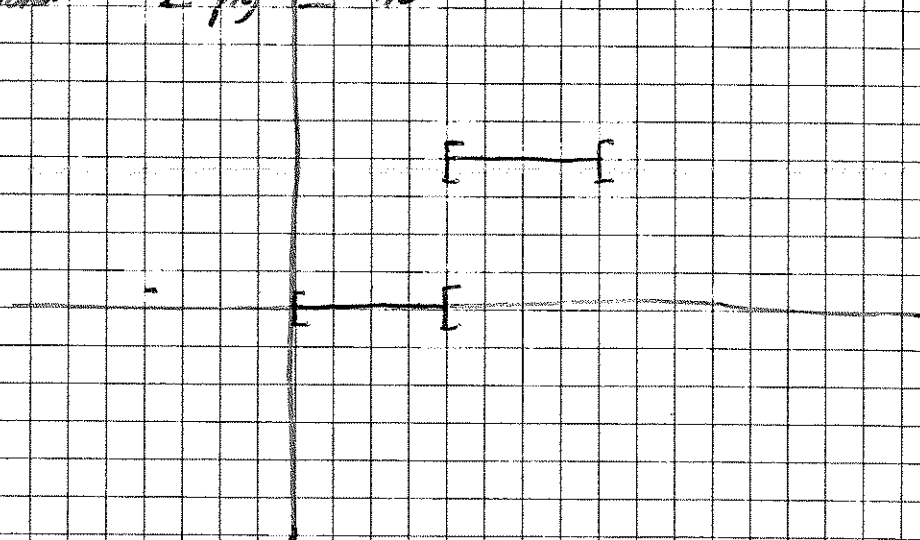
## seconde épreuve

Partie A

Problème 1

1.1 Non

la fonction partie entière est discontinue en tout  $x \in \mathbb{Z}$ .  
 Pourtant  $E(x) = x$



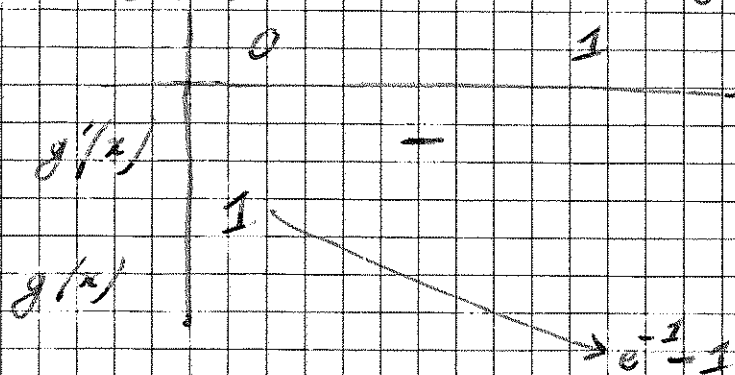
mais  $\chi_{\mathbb{Q}}$  la fonction caractéristique de  $\mathbb{Q}$  admet

1 comme point fixe mais n'est pas continue à droite  
 et à gauche en tout  $x_0$  de  $\mathbb{R}$

1.2 Non

$f(x) = x+1$  continue, n'a pas de point fixe

$$2) \quad g(x) = e^{-x} - x \quad g'(x) = -e^{-x} - 1 < -1$$



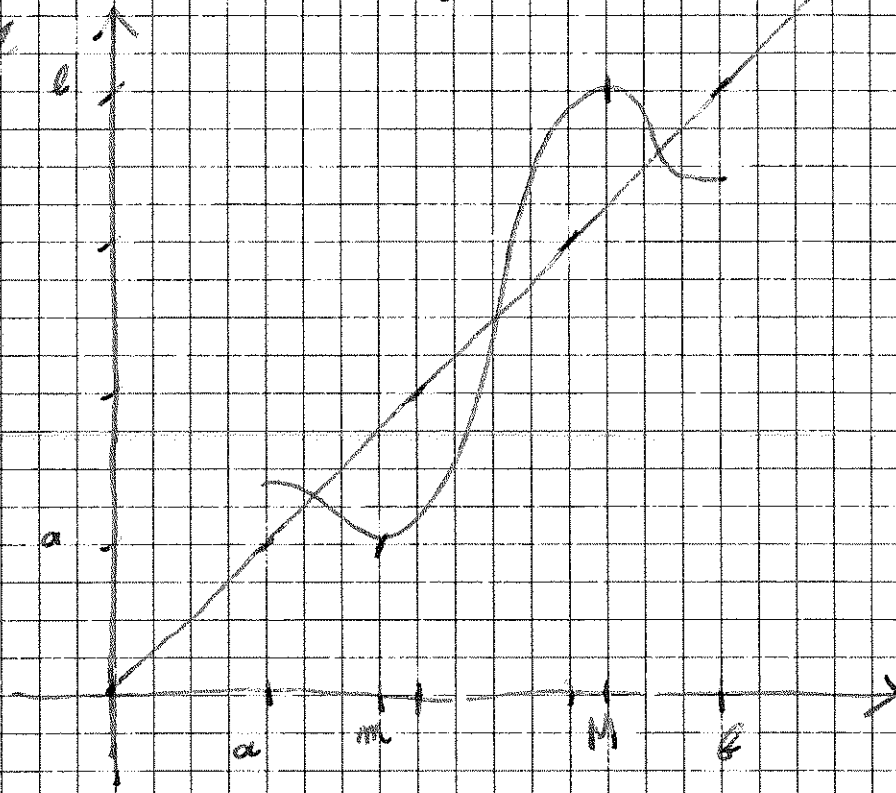
$e^{-x} - e^0 < 0$  car exponentielle est strictement  
décroissante

donc d'après le Théorème des valeurs intermédiaires,

$$\exists x \in ]0, 1[ \text{ tq } f(x) = x$$

$x$  est unique car  $g$  strictement décroissante

3.1



$$\text{Soit } g(x) = f(x) - x$$

$$\text{Soit } m \in [a, b] \text{ tq } f(m) = a$$

$$M \in [a, b] \text{ tq } f(M) = b$$

$$g(m) = f(m) - m = a - m \leq 0 \text{ car } m \geq a$$

$$g(M) = f(M) - M = b - M \geq 0 \text{ car } M \leq b$$

D'après les valeurs intermédiaires,  $\exists x \in$

segment d'ensemble  $m$  et  $M$  tq  $g(x) = 0$

$$\text{autre méthode } g(a) = f(a) - a \geq 0 \quad g(b) = f(b) - b \leq 0$$

(3)

3.2 On: Soit  $g(x) = f(x) - x$

$f$  strictement décroissante } donc  $g(x)$  est strictement  
 $x \mapsto -x$  aussi

décroissante donc  $g$  admet au plus un zéro

c à d  $f$  admet au plus un point fixe

3.3 Non  $f(x) = x$  est strictement croissante  
 et admet une infinité de points fixes

Partie B

$$1.1 \quad g(t) = \frac{1}{2} t \left( 1 + \frac{\alpha}{t^2} \right)$$

Soit  $t \in \mathbb{R}^{++}$

$$\text{tel que } g(t) = t \Rightarrow \frac{1}{2} t \left( 1 + \frac{\alpha}{t^2} \right) = t$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{\alpha}{t^2} = 2 \Rightarrow \frac{\alpha}{t^2} = 1 \Rightarrow \alpha = t^2$$

Soit  $t \in \mathbb{R}^+$

$t \neq 0$  car  $\alpha > 0$

$$\text{tel que } \alpha = t^2 \Rightarrow \begin{cases} g(t) = \frac{1}{2} t \left( 1 + \frac{1}{2} \right) = t \end{cases}$$

$$1.2 \quad f'(t) = 2t$$

équation de la tangente en  $t$

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

$$y - (t^2 - \alpha) = 2t(x - t)$$

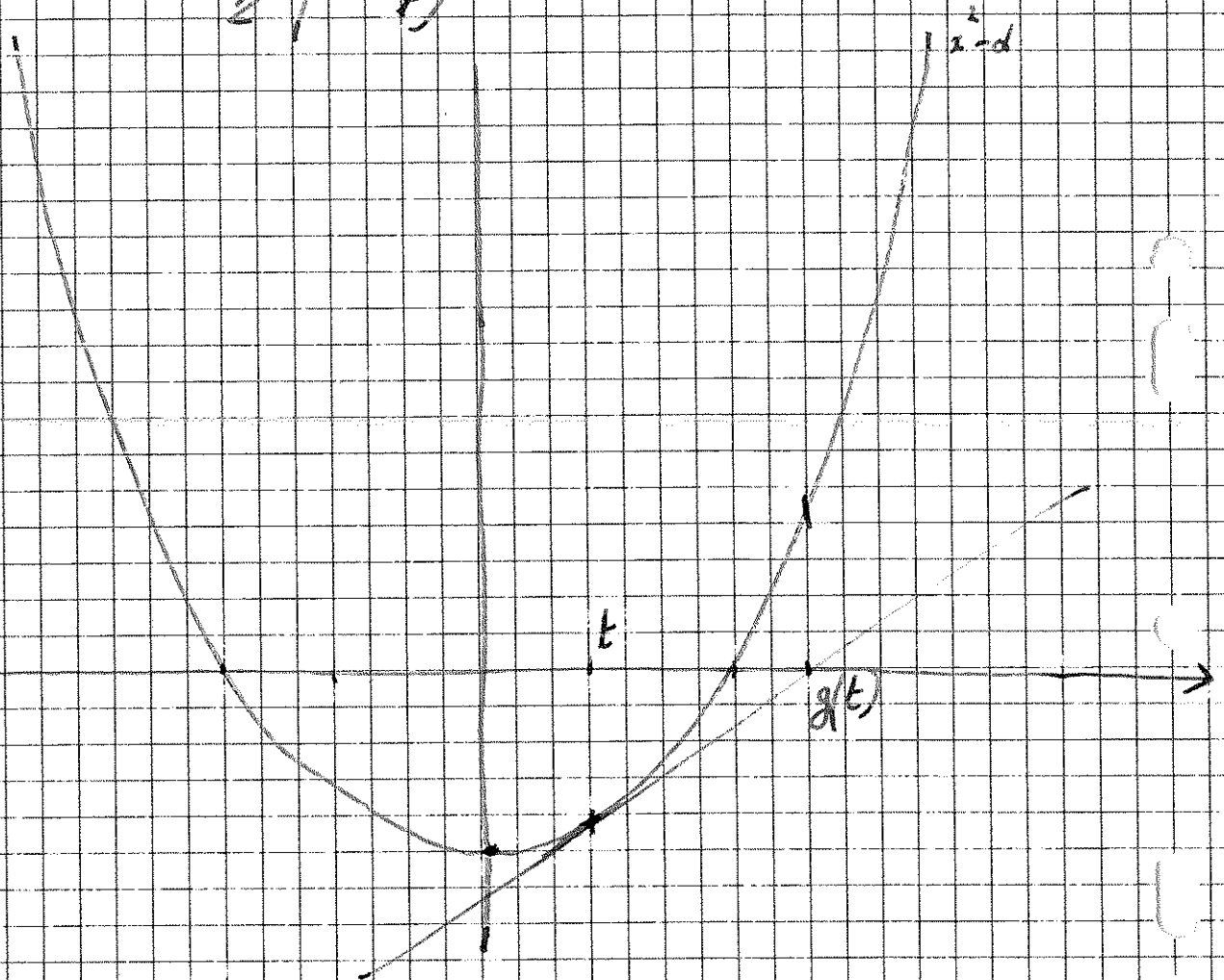
$$y = 2t(x - t) + t^2 - \alpha = 2tx - t^2 + t^2 - \alpha$$

intersection avec l'axe des abscisses  $y=0$

$$\begin{cases} y = 2tx - t^2 - d \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2tx = t^2 + d$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \left( t + \frac{d}{t} \right)$$

1.3



méthode de Newton pour l'application  $f$

Soit  $t \in \mathbb{R}$

on cherche l'abscisse  $g(t)$  du point d'intersection de la tangente  $T_t$  avec l'axe des abscisses

on recommence l'algorithme en remplaçant  $t$  par la  $g(t)$  trouvée

On s'arrête quand  $g(t) = t$

2.1

$$u_{n+1} = g(u_n)$$

donc si  $u_0 = \sqrt{\alpha}$  alors  $f(u_0) = 0$  donc d'après 1.1  
 $g(u_0) = u_0$  . Par récurrence  $\forall n \geq 0$   $u_n = u_0 = \sqrt{\alpha}$

$$g(t) - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2} \left( t \left( 1 + \frac{\alpha}{t^2} \right) - \frac{2\sqrt{\alpha}}{t} \right)$$

$$= \frac{1}{2} t \left( 1 - \frac{\sqrt{\alpha}}{t} \right)^2 \geq 0$$

si  $t \neq \sqrt{\alpha}$   $\left( 1 - \frac{\sqrt{\alpha}}{t} \right)^2 > 0$

donc  $g(t) > \sqrt{\alpha}$

Par récurrence  $\forall n \geq 1$   $u_n$  existe et  $u_n > \sqrt{\alpha}$

$n=1$   $u_0 > 0$  donc  $u_1$  existe et  $u_1 = g(u_0) > \sqrt{\alpha}$   
 car  $u_0 \neq \sqrt{\alpha}$

Supposons  $u_n$  existe et  $u_n > \sqrt{\alpha}$

alors  $u_{n+1}$  existe car  $u_n > 0$

et  $u_{n+1} = g(u_n) > \sqrt{\alpha}$  car  $u_n \neq \sqrt{\alpha}$

2.2 D'après 1.2

$g(t)$  est l'abscisse du pt d'intersection de  $T_t$  avec la parabole

donc  $u_{n+1} = g(u_n)$   $T_{u_n}$

2.3

$$g(t) - t = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{t} - t \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{t} \geq t$$

$$\Leftrightarrow \alpha \geq t^2 \Leftrightarrow t \leq \sqrt{\alpha}$$

donc  $\forall t > \sqrt{\alpha}$   $g(t) > t$

or  $\forall n \geq 1$   $u_n > \sqrt{\alpha}$  donc  $u_{n+1} = g(u_n) > u_n$

2.4  $u_n$  suite décroissante, minorée  
donc convergente.

Soit  $l = \lim u_n$

$\forall n \geq 1 \quad u_n \geq \sqrt{x} \quad \text{donc} \quad l \geq \sqrt{x} > 0$

et  $g$  est continue en  $l$

donc comme  $u_n$  converge vers  $l$

$u_{n+1} = g(u_n)$  converge vers  $g(l) = l$

donc  $l = g(l)$  donc  $f(l) = 0$  donc  $l = \sqrt{x}$

2.5

$g(t) - \sqrt{2} = \frac{1}{2} t \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{t}\right)^2$

ou comme  $\sqrt{2} \leq t \quad \sqrt{2}t \leq t^2 \quad \text{car} \quad t \leq \frac{\sqrt{2}}{2} t^2$

donc  $g(t) - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{t^2}{t} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{t}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(t - \sqrt{2}\right)^2$

donc  $0 \leq u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} (u_n - \sqrt{2})^2$

donc  $u_n$  converge à  $\sqrt{2}$  car  $2$

Partie C

1. Soit  $x_0 \in I$ .  $\forall x \in I \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \delta |x - x_0|$

donc  $|x - x_0| = 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$

c à d  $f$  est continue en  $x_0$ . En fait, même  $f$  est uniformément

2.1 H1

continue

2.2 Par récurrence sur  $j \in \mathbb{N}$

$|u_{j+1} - u_j| \leq \delta^j |u_1 - u_0|$

$$|u_{m+p} - u_m| = \left| \sum_{j=m}^{m+p-1} (u_{j+1} - u_j) \right| \leq \sum_{j=m}^{m+p-1} |u_{j+1} - u_j|$$

$$\leq \sum_{j=m}^{m+p-1} j^p |u_1 - u_0|$$

Or  $\sum_{j=m}^{m+p-1} j^p = j^m \frac{1 - j^p}{1 - j} \leq j^m \frac{1}{1 - j}$

comme de  $p$  termes d'une suite géométrique dont la 1<sup>ère</sup> terme est  $j^m$

2.3  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{j^m}{1 - j} |u_1 - u_0| = 0$

donc soit  $\varepsilon > 0$ . il existe  $N \in \mathbb{N}$  tq

$$\forall n \geq N \quad \frac{j^m}{1 - j^m} |u_1 - u_0| \leq \varepsilon$$

donc  $\forall n \geq N$

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad |u_{m+p} - u_m| \leq \varepsilon$$

donc la suite  $u_n$  est de Cauchy.

Comme  $\mathbb{R}$  est complet, elle est convergente dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $l = \lim u_n \quad \forall n \quad a \leq u_n \leq b$

donc  $a \leq l \leq b$  c à d  $l \in I$ .

3°) Soient  $l_1$  et  $l_2$  deux points fixes

c à d  $l_1 = f(l_1)$   
 $l_2 = f(l_2)$

donc

$$|l_1 - l_2| = |f(l_1) - f(l_2)| \leq j |l_1 - l_2|$$

donc  $(1 - j) |l_1 - l_2| \leq 0$  donc  $|l_1 - l_2| = 0$  c à d  $l_1 = l_2$

d'après 1,  $f$  est continue en  $l = \lim u_n$   
donc  $f(l) = \lim f(u_n) = \lim u_{n+1} = l$   
donc  $l$  est un point fixe

4°) Soit  $f: I \rightarrow I$  croissante

alors  $f$  admet un unique point fixe

Toute suite  $u_n$  définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$   $u_0 \in I$   
converge vers le point fixe.

c'est du cours Théorème du point fixe dans Remarques - Exercices - Odeur  
tome 3

5°/  
 $|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq k |u_n - l|$   
donc convergence géométrique.

Problème 2  $\sin^{n/2}(t)$  fonction continue, positive, pas identiquement nulle. ③

1°)  $\forall 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$   $\sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$

donc

$$W_{n+1} \leq W_n$$

2°)  $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t) dt = \int_0^{\pi/2} \sin t \sin^{n+1}(t) dt$

par 0 parties

$$= \left[ (-\cos t) \times \sin^{n+1}(t) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos t)(n+1) \cos t \sin^n t dt$$

$$\cos \left( \sin^{n+1}(t) \right)' = (n+1) \cos t \sin^n t$$

$$= 0 + (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \sin^n t dt$$

$$= (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2}$$

donc  $(n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n$

3°) D'après 1°)  $1 \leq W_n / W_{n+1}$

$$(n+1) W_n = (n+2) W_{n+2} \leq (n+2) W_{n+1}$$

d'après 2.

d'après 1

donc  $\frac{n+2}{n+1} \leq \frac{W_n}{W_{n+1}}$

4) d'après 3 et 1<sup>re</sup> des questions

comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$

la suite  $\frac{W_n}{W_{n+1}}$  converge vers 1

5°)  $\forall n \geq 0$   
 $u_{n+1} = (n+2) W_{n+1} W'_{n+1} = (n+1) W_n W'_{n+1} = u_n$   
 d'après 2

donc  $u_n$  est constante

$\forall n \geq 0 \quad u_n = u_0 = 1 \times W_1 \times W'_0$

$W_0 = \frac{\pi}{2} \quad W'_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = \left[ \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

donc  $\forall n \geq 0 \quad u_n = \frac{\pi}{2}$

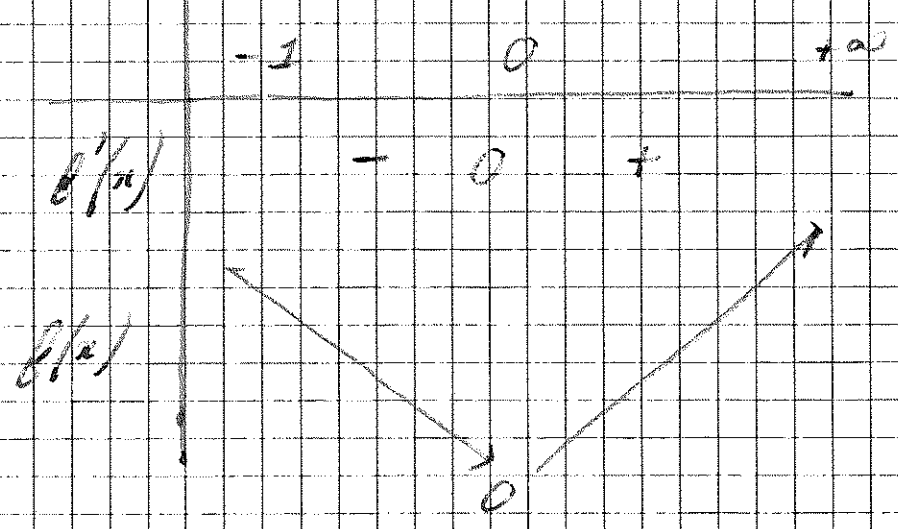
6°)  $n W_n^2 \rightsquigarrow n W_{n+1} W'_n \rightsquigarrow u_n = \frac{\pi}{2}$   
 d'après 4)

donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} n W_n^2 = \frac{\pi}{2}$

donc  $\forall n \quad W_n = \sqrt{n W_n^2} \rightsquigarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  converge vers  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Partie B

1°) Soit  $f(x) = x - \ln(1+x) \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x+1-1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$



$f(0) = 0$

donc  $\forall x \in ]-1, +\infty[$

$f(x) \geq 0$

$$2^{\circ}) \quad \forall t \in [0, \sqrt{n}] \quad \ln\left(-\frac{t^2}{n} + 1\right) \leq -\frac{t^2}{n}$$

$$\text{donc} \quad n \ln\left(-\frac{t^2}{n} + 1\right) \leq -t^2$$

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)} \leq e^{-t^2}$$

$$\text{or } t = \sqrt{n} \quad \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = 0 \leq e^{-t^2}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}$$

$$\text{donc} \quad -n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \geq -t^2$$

$$\text{donc} \quad \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} = e^{-n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)} \geq e^{-t^2}$$

$$3^{\circ}) \quad \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_{\pi/2}^0 \left(1 - \cos^2 u\right)^n (\sqrt{n}) du \quad \text{avec } u \text{ dec}$$

$$t = \sqrt{n} \cos u \quad dt = -\sqrt{n} \sin u$$

$$\frac{t^2}{n} = \cos^2 u$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} u \sin u du$$

$$4^{\circ}) \quad t = \sqrt{n} \cot u \quad (\cot u)' = \left(\frac{\cos u}{\sin u}\right)' = \frac{-\sin^2 u - \cos^2 u}{\sin^2 u}$$

$$dt = \sqrt{n} \frac{-1}{\sin^2 u} du$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = 1 \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\text{donc } \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(1 + \cos^2 u\right)^{-n} \left(-\frac{du}{\sin^2 u}\right)$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 u}\right)^{-n} \frac{du}{\sin^2 u} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2} u \, du$$

5°) d'après 2°

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

On  $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} W_{2n+1}$  d'après 3

et  $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt \stackrel{4)}{=} \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2} u \, du \leq \sqrt{n} W_{2n-1}$

6°) d'après A. 6

$$\sqrt{n} W_{2n+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} \sqrt{2n+1} W_{2n+1}$$

$$\text{converge vers } \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

De même comme  $\sqrt{n} \sim \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}$

$$\sqrt{n} W_{2n-1} \text{ converge aussi vers } \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

d'après le théorème des gendarmes

$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$  est une fonction croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

en outre la suite  $F(\sqrt{n})$  est croissante

donc  $\forall n \geq 0 \quad F(\sqrt{n}) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} F(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\forall x \geq 0 \quad x \leq \sqrt{n}$  pour un  $n$  assez grand

donc  $F(x) \leq F(\sqrt{n}) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

donc  $F$  fonction croissante majorée admet une

limite finie quand  $x \rightarrow +\infty$

c à d  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$  converge

Par définition  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

autre méthode  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$

donc  $t^2 e^{-t^2}$  est majorée par un  $M \in \mathbb{R}$

Comme  $\int_1^{+\infty} M \frac{dt}{t^2}$  converge, par comparaison  $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$  converge

1.1  $f$  doit être à valeurs positives  
continue sur  $\mathbb{R}$  sauf en un nombre fini de points

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \text{ doit converger et être égal à } 1$$

1.2 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_R(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \varphi_R(x) dx$$

(car  $\varphi_R$  para donc  $\int_{-a}^0 \varphi_R(x) dx = \int_0^a \varphi_R(x) dx$ )

$$= 2R \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = 2R \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \sqrt{2} dt$$

Posons  $x = \sqrt{2} t$

$$\therefore 2R\sqrt{2} \cdot 1 = 2R\sqrt{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ doit être égal à } 1$$

$$\text{donc } R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

2.1 
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$\int x e^{-x^2/2} = -e^{-x^2/2}$$

donc  $\int_0^b x e^{-x^2/2} = 1 - e^{-b^2/2} \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} 1$

donc  $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2/2} dx$  converge et est égale à 1

$$\int_a^0 x e^{-x^2/2} = -1 + e^{-a^2/2} \xrightarrow{a \rightarrow -\infty} -1$$

donc  $\int_{-\infty}^0 x e^{-x^2/2} dx$  converge et est égale à  $-1$

donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2/2} dx$  converge et est égale à  $-1 + 1 = 0$

donc  $E(X)$  est bien défini et  $E(X) = 0$

## 2.2 Formule de Kovnig

Comme  $X$  admet une espérance  $E(X)$

Var  $X$  existe si  $E(X^2)$  existe

et dans ce cas on a  $\text{Var } X = E(X^2) - E(X)^2$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

$$\int x^2 e^{-x^2/2} dx \underset{\text{par parties}}{=} x \cdot (-e^{-x^2/2}) + \int e^{-x^2/2} dx$$

donc  $\int_0^a x^2 e^{-x^2/2} dx = -a e^{-a^2/2} + \int_0^a e^{-x^2/2} dx \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0 + \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$

$$\text{donc } \int_{-b}^0 x^2 e^{-x^2/2} dx = b e^{-b^2/2} + \int_{-b}^0 e^{-x^2/2} dx$$

$$\xrightarrow{b \rightarrow +\infty} 0 + \int_{-\infty}^0 e^{-x^2/2} dx$$

$$\text{donc } \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx \text{ converge et est égale à } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$$

donc  $E(X^2)$  est bien défini et est égale

$$\bar{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1$$

$$\text{donc } \text{Var } X = 1 - 0^2 = 1$$

$$3.1 \quad 0 = E(X) = \frac{1}{\sigma} (E(Z) - \mu)$$

$$\text{donc } E(Z) = \mu$$

$$1 = \text{Var } X = \frac{1}{\sigma^2} \text{Var}(Z - \mu) = \frac{1}{\sigma^2} \text{Var } Z$$

$$\text{donc } \text{Var } Z = \sigma^2$$

3.2

$$P(Z \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx \quad \text{donc } f(x) = \frac{dP(Z \leq t)}{dt}$$

$$Z \leq t \Leftrightarrow X \leq \frac{t - \mu}{\sigma}$$

donc  $P(Z \leq t) = P\left(X \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\right)$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} \varphi(u) du = \int_{-\infty}^t \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \frac{dx}{\sigma}$$

Posez  $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$   $du = \frac{dx}{\sigma}$

$$= \int_{-\infty}^t \frac{\varphi(\sigma u + \mu)}{\sigma} du$$

donc on peut prendre  $f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$$= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

4.  $Y = X^2$  on a vu que  $E(X^2) = 1$   
donc  $E(Y) = 1$ .

$$\text{Var } Y = E(Y^2) - E(Y)^2 = E(X^4) - 1^2$$

$$\int x^4 e^{-x^2/2} dx = x^3 \left(-e^{-x^2/2}\right) + \int 3x^2 e^{-x^2/2}$$

$$= -x^3 e^{-x^2/2} + 3 \left(-x e^{-x^2/2} + \int e^{-x^2/2} dx\right)$$

donc

$$\int_0^a x^4 e^{-x^2/2} dx \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0 + 0 + 3 \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$$

$$d \int_{-\infty}^0 x^4 e^{-x^2/2} dx \xrightarrow{b \rightarrow -\infty} 0 + 0 + 3 \int_{-\infty}^0 e^{-x^2/2} dx$$

donc  $E(X^4)$  existe et est égale à  $3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = 3 \times 1$

donc  $\text{Var } Y = 3 - 1 = 2$

4.2  $Y \leq t$  veut dire  $X^2 \leq t$

impossible si  $t < 0$

donc  $P(Y \leq t) = 0$  si  $t < 0$

donc sa densité de probabilité est nul pour les  $t < 0$  contrairement à une loi

normale d'après 3.2

donc  $Y = X^2$  ne suit pas une loi normale

Soit  $t > 0$   $Y \leq t \Leftrightarrow |X| \leq \sqrt{t}$

donc  $P(Y \leq t) = P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t})$

$$= \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 2 \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} 2 dx$$

$$u = x^2 \quad du = 2x dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon^2}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u/2} \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$= \int_0^t \frac{e^{-u/2}}{\sqrt{2\pi u}} du$$

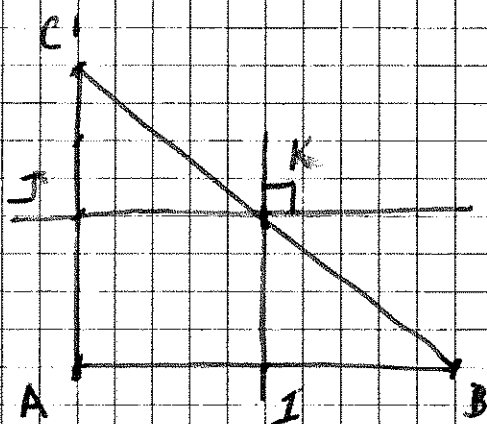
donc la densité de  $Y$  pour  $t > 0$

est  $\frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}}$

Remarque  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}} = +\infty$

c'est la loi de Kéi - deux à un degré de liberté

1°)



Soit  $I$  le milieu de  $AB$   
 $J$  milieu de  $AC$

Supposons que les 2 médiatrices  $IK$  et  $JK$  soient perpendiculaires

$$IK \perp JK$$

comme  $AC \perp JK$

$$AC \parallel IK$$

$$IK \perp AB$$

donc  $AB \perp AC$

alors  $ABC$  est rectangle en  $A$

Réciproque si  $AB \perp AC$

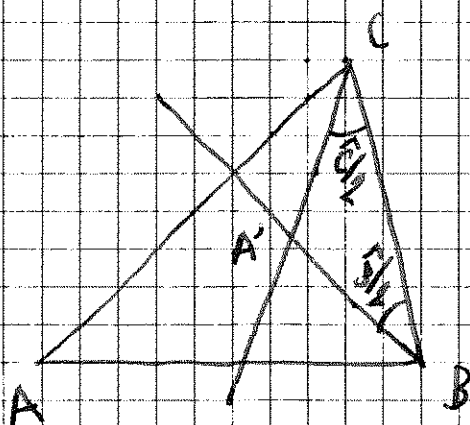
comme  $IK \perp AB$

$$AC \parallel IK$$

comme  $AC \perp JK$

$$IK \perp JK$$

2°)



Soit  $A'$  le point d'intersection  
 des bissectrices intérieures des angles  
 $\hat{B}$  et  $\hat{C}$

donc le triangle  $ABC$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \quad L_1$$

donc le triangle  $A'BC$

$$\hat{A'} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = \pi \quad L_2$$

donc  $2L_2 - L_1 \quad 2\hat{A'} - \hat{A} = \pi$

donc si les hauteurs sont perpendiculaires

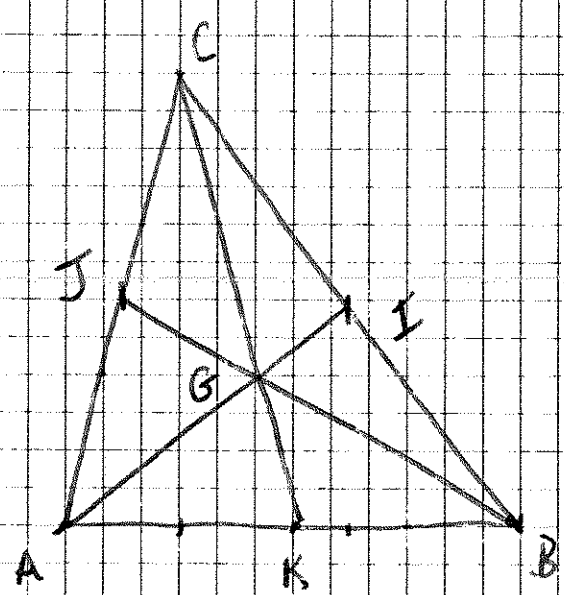
$$\hat{A}' = \frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad \tilde{A} = 0$$

ce triangle n'est pas aplati.

3°) Par le même raisonnement qu'au 1°

il faut et il suffit que ABC soit rectangle en A.

4°)



Soit G l'intersection de A, B et C

$$\text{donc} \quad \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

$$\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GI} + \vec{IB} + \vec{GI} + \vec{IC} = 2\vec{GI}$$

$$\text{donc} \quad \vec{GA} + 2\vec{GI} = \vec{0}$$

$$\vec{GI} + \vec{IA} + 2\vec{GI} = \vec{0}$$

$$\text{donc} \quad \vec{IG} = \frac{1}{3} \vec{IA}$$

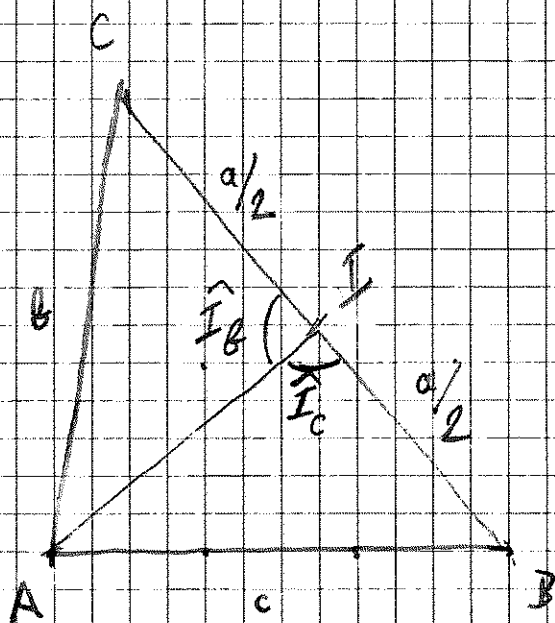
donc G est à la médiane issue de A

et est situé au  $\frac{2}{3}$  de cette médiane en partant de A

le même avec les 2 autres médianes

4.2

(22)



$$\vec{I_B} + \vec{I_C} = \vec{0}$$

$$\text{donc } \cos(\vec{I_B}) = -\cos \vec{I_C}$$

donc ABI  
ACI

$$c^2 = AI^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2AI \frac{a}{2} \cos \vec{I_C}$$

$$b^2 = AI^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2AI \frac{a}{2} \cos \vec{I_B}$$

$$b^2 + c^2 = 2AI^2 + \frac{a^2}{2} - AI a (\cos \vec{I_C} + \cos \vec{I_B})$$

15/03/20

4.3

Les médianes BJ et CK sont perpendiculaires

on a  $BE \perp CG$  ou  $BGC$  rectangle en G

$$\text{on a } a^2 = BG^2 + CG^2$$

$$AI = \frac{3}{2} AG \text{ d'après 4.1}$$

$$\text{donc } c^2 + b^2 = 2 \cdot \frac{9}{4} AG^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$\text{donc } 2c^2 + 2b^2 = 9AG^2 + a^2$$

$$\text{donc } AG^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{9}$$

$$\text{De même } BG^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{9}$$

$$CG^2 = \frac{2b^2 + 2a^2 - c^2}{9}$$

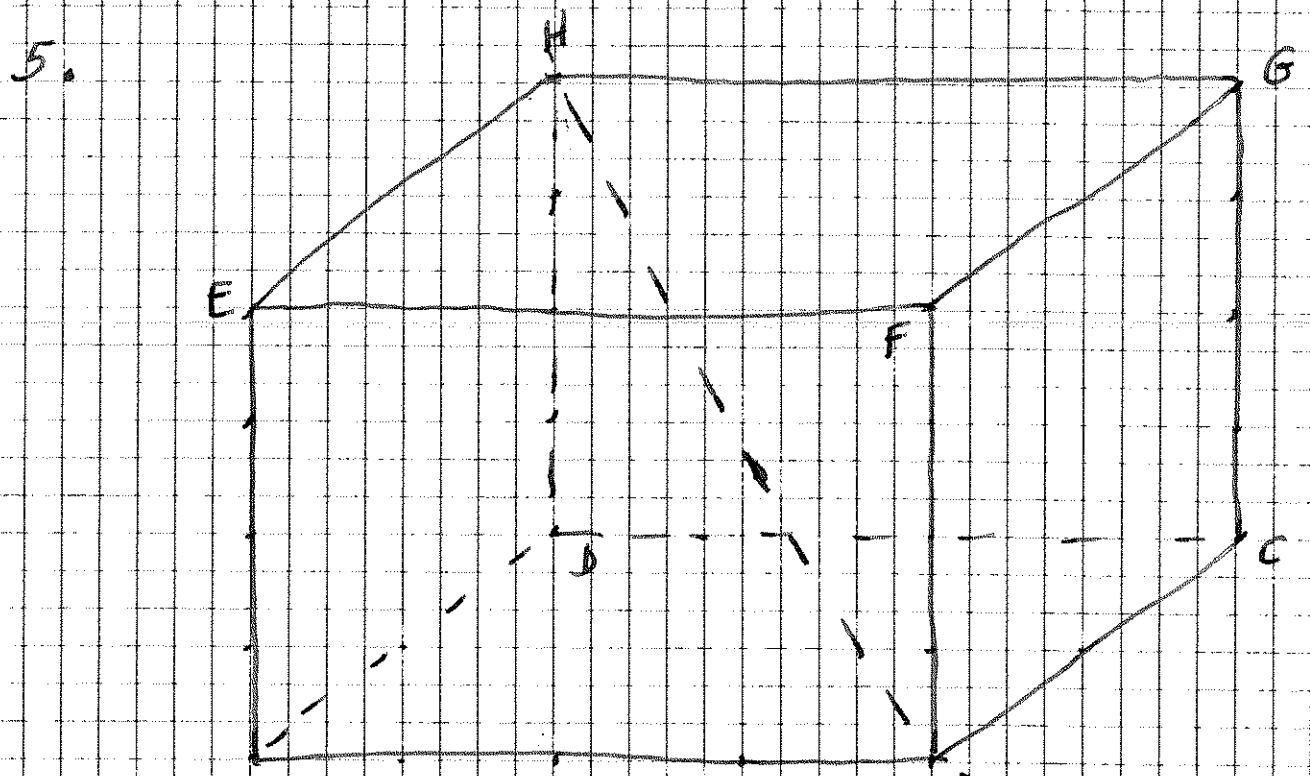
$$\text{donc } BG^2 + CG^2 = \frac{4a^2 + b^2 + c^2}{9}$$

donc  $a^2 = BG^2 + HG^2$

donc  $a^2 = \frac{4a^2 + b^2 + c^2}{9}$

donc  $9a^2 = 4a^2 + b^2 + c^2$

donc  $5a^2 = b^2 + c^2$



Je n'y arrive pas en utilisant 4.3

Analytiquement dans le repère  $(D, \vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DH})$

$\vec{HB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  on cherche  $t$  tel que  $\vec{HA'} = t \vec{HB}$

donc  $A' = \begin{pmatrix} 0+t \\ 0+t \\ 1-t \end{pmatrix}$   
 $\vec{AA'} = \begin{pmatrix} t-1 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix}$

$0 = \vec{AA'} \cdot \vec{HB} = (t-1) \times 1 + t \times 1 + (1-t) \times (-1) = 3t - 2$

donc  $t = \frac{2}{3}$

donc  $\vec{HA'} = \frac{2}{3} \vec{HB}$  et  $A' = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

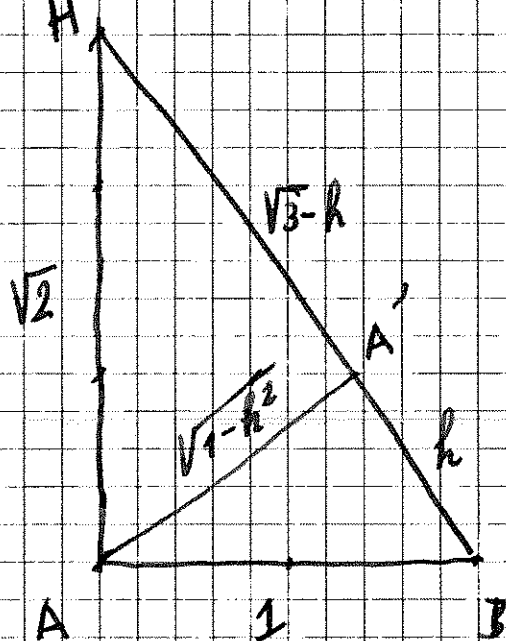
Donc avec une règle, je met  $A'$  sur la droite

$HB$  située au  $\frac{2}{3}$  en partant de  $H$ ,

et au  $\frac{1}{3}$  en partant de  $B$ .

2<sup>ème</sup> méthode

On considère que les arêtes du cube ont de longueur 1



$$AH^2 = AB^2 + BH^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$HB^2 = AB^2 + AH^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 3$$

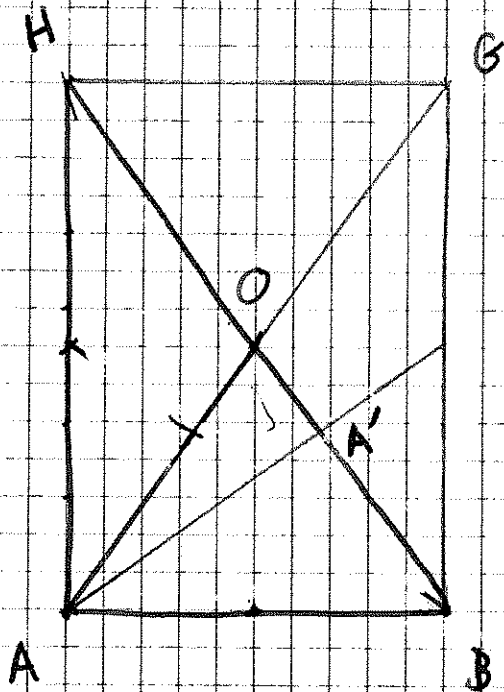
$$AA'^2 + A'B^2 = AB^2 \text{ donc } AA' = \sqrt{1-k^2}$$

$$AA'^2 + A'H^2 = AH^2 \text{ donc } 1-k^2 + (\sqrt{3}-h)^2 = 2$$

$$1 - \cancel{k^2} + 3 + \cancel{k^2} - 2\sqrt{3}h = 2 \text{ donc } 2\sqrt{3}h = 2$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{donc } BA' = \frac{1}{3} BH$$



$$BG^2 = BC^2 + CG^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$AG^2 = AB^2 + BG^2 = 1^2 + 2 = 3$$

Dans le triangle  $ABG$ , les médianes issues de  $A$  et de  $B$ , sont perpendiculaires car

$$BG^2 + AG^2 - 5AB^2$$

$$= 2 + 3 - 5 \times 1 = 0 \text{ d'après 4.3}$$

Donc  $A'$  est le point d'intersection de  $HB$  et

de la médiane issue de  $A$  dans le triangle  $ABG$

Conclusion à la règle, on trace  $GB$  et  $FC$ .

Leur point d'intersection est  $I$ , le centre du cube  $GFCH$

on trace  $AI$ , le point d'intersection

de  $AI$  et  $HB$  est le point  $A'$  recherché

