

Problème 2 : dénominateurs des nombres entiers

9h15 Partie A

A. 1. Soit $m \in \mathbb{Z}$ alors $10^0 m = m \in \mathbb{Z}$ donc $m \in \mathbb{D}$
donc $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ $1, 2 \in \mathbb{D}$ mais $1, 2 \notin \mathbb{Z}$

Soit $x \in \mathbb{D}$ donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tq $10^m x \in \mathbb{Z}$

donc $10^m x = p$ avec $p \in \mathbb{Z}$ donc $x = \frac{p}{10^m}$

$10^m \in \mathbb{N}$ donc $x \in \mathbb{Q}$ donc $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

2. Soient $x, y \in \mathbb{D}$

donc $\exists m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tq $10^m x \in \mathbb{Z}$ et $10^n y \in \mathbb{Z}$

+ Par symétrie, supposons $m \geq n$

$$10^m(x+y) = \underbrace{10^m x}_{\in \mathbb{Z}} + 10^{m-n} \times \underbrace{10^n y}_{\in \mathbb{Z}} \text{ donc } \in \mathbb{Z}.$$

donc $x+y \in \mathbb{D}$.

$$\bullet \quad 10^{m+n} xy = \underbrace{10^m x}_{\in \mathbb{Z}} \times \underbrace{10^n y}_{\in \mathbb{Z}} \text{ donc } \in \mathbb{Z}$$

donc $xy \in \mathbb{D}$.

9h25

$$3.1 \quad 10^{\alpha+\beta} x = 10^{\alpha+\beta} \frac{a}{2^\alpha 5^\beta}$$

$$= 5^\alpha \times 2^\beta a \in \mathbb{Z} \text{ donc } x \text{ est dénomial}$$

3.2 Supposons $x \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{Z}$ donc $10^m \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$ pour un m .

donc $b \mid 10^m a$. Or b et a sont premiers entre eux donc $b \mid 10^m$ (Gauss).

donc $b = 2^\alpha 5^\beta$ p est donc la décomposition en facteurs premiers de b

donc $p = 2$ ou 5

3.3 $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{N} \text{ tq } B = 2^\alpha \times 5^\beta \Rightarrow x \text{ decimal}$
d'après 3.1

Réciproquement d'après 3.2

$x \text{ decimal} \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{N} \text{ tq } B = 2^\alpha \times 5^\beta$

4.1.

$\sum \frac{d_n}{10^n}$ série à termes positifs

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{d_n}{10^n} \leq 9 \times \frac{1}{10^n}$$

$\sum 9 \frac{1}{10^n}$ série géométrique de raison $\frac{1}{10} < 1$

donc $\sum \frac{d_n}{10^n}$ converge d'après comparaison, $\sum \frac{d_n}{10^n}$ converge aussi

9h50
4.2 cas fini donc $\exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n > N \quad d_n = 0$

$$\text{donc } x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n} = \sum_{n=0}^N \frac{d_n}{10^n}$$

$$\text{donc } 10^N x = \sum_{n=0}^N 10^{N-n} d_n \in \mathbb{N}$$

cas infini $\exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n > N \quad d_n = 9$

$$\text{donc } x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n} = \sum_{n=0}^N \frac{d_n}{10^n} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^n}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} &= \frac{9}{10^{N+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10^{N+1}} \times \frac{10}{9} \\ &= \frac{1}{10^N} \end{aligned}$$

comme d'une série géométrique

$$\text{donc } x = \sum_{n=0}^N \frac{d_n}{10^n} + \frac{1}{10^N} \quad \text{donc } 10^N x = \sum_{n=0}^N 10^{N-n} d_n + 1 \in \mathbb{N}$$

9h58

4.3

(3)

$$\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} < \frac{d_N}{10^N} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k}$$

avec égalité si $\forall k \geq N+1, d_k = 9$

or $\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^N}$ d'après calcul précédent

4.4 Supposons que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$ avec

d_n suite décimale propre

alors d'après 4.3 $\forall N \geq 0$

$$\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} < \frac{1 + d_N}{10^N}$$

donc

$$d_N < 10^N \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} < 1 + d_N$$

donc $\forall N \geq 0$

$$d_N = E \left(10^N \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} \right)$$

donc $\forall N \geq 0, d_N = E \left(10^N / x - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{d_k}{10^k} \right) / 10^{N-1}$

5.

Si une suite décimale

est finie alors elle est propre

donc l'unique moment du 4.4

Exercice : Soit $x \in \mathbb{D}$ positif donc $\exists n \in \mathbb{N}$

tg $10^n x \in \mathbb{N}$

donc $10^n x = \sum_{i=0}^N c_i 10^i$ on pose $c_i = 0$ on suppose $N \geq n$

donc $x = \sum_{i=0}^N c_i \frac{10^i}{10^n}$
 $= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{1}{10^{n-i}} + \sum_{i=n}^N c_i 10^{i-n}$
 on pose $d_{n-i} = c_i$ d_0 par définition

on pose $d_i = 0$ pour $i > n$

10h45 Partie B

1.2

$$\begin{array}{r} 5 \\ -0 \\ \hline 50 \\ \text{r}_0 \\ -39 \\ \hline 110 \\ \text{r}_1 \\ -104 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ \text{r}_2 \\ -52 \\ \hline 80 \\ \text{r}_3 \\ -78 \\ \hline 20 \\ \text{r}_4 \\ -13 \\ \hline 70 \\ \text{r}_5 \\ -65 \\ \hline 50 \\ \text{r}_6 \\ -39 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \hline 0,3846153 \\ \text{r}_0 \text{ r}_1 \text{ r}_2 \text{ r}_3 \text{ r}_4 \text{ r}_5 \text{ r}_6 \end{array}$$

c'est le principe de la division

$\frac{5}{13} = 0,384615,3$
 période

1.1. Paire de 10 mm

(5)

Pour i variant de 0 à N

$$q = E(a/b) ; \text{ afficher } q$$

$$r = a - b q ; \text{ afficher } r$$

$$a = 10 \times r$$

fon pour 1

$$a = b d_0 + r_0$$

$$2.1 \quad \forall n \geq 0 \quad 10 r_n = b d_{n+1} + r_{n+1}$$

$$\text{Pensez pour retenir en } n \quad x = \sum_{k=0}^n \frac{d_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n b}$$

$$n=0 \quad x = \frac{a}{b} = d_0 + \frac{r_0}{10^0 b} \quad \text{mais}$$

Supposons maintenant au rang n

$$x = \sum_{k=0}^n \frac{d_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n b}$$

$$r_n = \frac{b d_{n+1}}{10} + \frac{r_{n+1}}{10}$$

donc

$$x = \sum_{k=0}^n \frac{d_k}{10^k} + \frac{d_{n+1}}{10^n \times 10} + \frac{r_{n+1}}{10^n \times 10 \times b}$$

donc nous au rang $n+1$

mh23

2.2

$$\text{donc } 10^n \frac{a}{b} = \sum_{k=0}^m d_k 10^{n-k} + \frac{r_m}{b}$$

$$\text{donc } 10^n a = b \sum_{\substack{k=0 \\ k \in \mathbb{N}}}^m d_k 10^{n-k} + r_m$$

$$0 \leq r_m < b$$

donc r_m est le reste de la division euclidienne de $10^n a$ par b .

$$2.3 \quad 0 \leq \frac{r_m}{10^n b} < \frac{b}{10^n b} = \frac{1}{10^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{d_k}{10^k} = x \quad \text{d'après 2.1}$$

d'après A.4.3

$$\cancel{\frac{d_N}{10^N}} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} < \cancel{\frac{1}{10^N}} + \cancel{\frac{d_N}{10^N}}$$

avec égalité car $\forall k \geq N+1 \quad d_k = 9$

$$\text{Ici } \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} = \frac{r_m}{10^m b} < \frac{1}{10^m}$$

$$\text{donc } \exists k \geq m+1 \quad d_k \neq 9$$

Ceci est vrai pour tout $m \in \mathbb{N}$ donc la suite est propre mk45

3.1 Si il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $r_n = 0$

alors $x = \sum_{k=0}^n \frac{d_k}{10^k}$ donc x est décimal

3.2

$r_0, r_1, \dots, r_{b-1}$ sont des entiers strictement inférieurs entre 0 et b donc ne peuvent pas être deux à deux distincts

11h52

3.3 Soient par récurrence $\forall n \geq 9$ $r_{n+p} = r_n$

car $n = 9$ $r_{9+p} = r_9$ par hypothèse

Supposons $r_{n+p} = r_n$

donc $10 r_{n+p} = 10 r_n$

donc $r_{n+p+1} = r_{n+1}$

et $d_{n+p+1} = d_{n+1}$

12h02

4.1 i. Montrer tout d'abord que 10^n n'est pas congru à 0 modulo b

Si $10^n \equiv 0 \pmod{b}$ alors $b \mid 10^n$

donc $b = 2^\alpha 5^\beta$ donc d'après 3.1

x est décimal. Contradiction

Modulo b , $10^0, 10^1, \dots, 10^{b-1}$ sont donc b nombres différents de $\mathbb{C}$

donc comme pour le 3.2,

donc d'entre ces modules B sont égaux

ii. D'après 2.2

module B x_m est égal à $10^m a$

donc $x_p = x_q$ car $x_p = x_q$ module B

iii. $10^p a = 10^q a$ module B

iv. $B / (10^p - 10^q) a$

comme B et la même chose est

v. $B / 10^p - 10^q$

vi. $10^p = 10^q$ module B

Donc par définition de p et q d'après 3.3

on a ii)

4.2 D'après 4.1 ii) la pré-période q et la période p sont indépendantes de a .

donc a/B a la même période et

pré-période que $1/B$ (car si $a = 1$)

5. 12h 45

$$\begin{array}{r} 1 \\ - 0 \\ \hline 10 \\ - 7 \\ \hline 30 \\ - 28 \\ \hline 20 \\ - 14 \\ \hline 60 \\ - 56 \\ \hline 40 \\ - 35 \\ \hline 50 \\ - 49 \\ \hline 1 \end{array}$$

7

0,1428571

$\underbrace{d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6}_{\text{}}$

pre - pende $g = 0$
pende $n = 6$

$$\begin{array}{r} 1 \\ -0 \\ \hline n_0 \quad 10 \\ -0 \\ \hline x_1 \quad 100 \\ -96 \\ \hline n_2 \quad 40 \\ -36 \\ \hline n_3 \quad 40 \end{array}$$

11

 $0,08\overline{33}$

 pro-periode $q=2$
 periode $p=1$

$$\begin{array}{r} 1 \\ -0 \\ \hline n_2 \quad 10 \\ -0 \\ \hline n_7 \quad 100 \\ -0 \\ \hline n_2 \quad 1000 \\ -896 \\ \hline n_3 \quad 1040 \\ -1008 \\ \hline n_4 \quad 320 \\ -224 \\ \hline n_5 \quad 96 \end{array}$$

112

0,0089285714

per - periode $q = 4$
periode $p = 6$

$112 = 2^4 \times 7$

13603

Partie C

10

1.1. Si $10^9 = 10^{9+p}$ modulo b

Comme b est premier avec 10 , d'après Bezout

$$\exists u, v \quad 10u = 1 \text{ modulo } b$$

donc 10 est inversible modulo b

donc $1 = 10^p$ modulo b

Réciproquement si $1 = 10^p$ modulo b

alors $10^9 \times 1 = 10^9, 10^p$ modulo b

1.2. D'après 1.1. i)

la pre-miére est forcément égal à 0

2. $b = 2^a 5^k \times c$ avec c premier avec 10

Si $2^a \times 5^k / 10^9$ et $c / 10^p - 1$

donc $b = 2^a \times 5^k \times c / 10^9 \times (10^p - 1)$

Réciproquement Si $b = 2^a \times 5^k \times c / 10^9 \times (10^p - 1)$

alors $c / 10^9 \times (10^p - 1)$ Par Gauss

comme c est premier avec 10^9

$$c / 10^p - 1$$

14h

si $p \geq 1$ $2^a \times 5^k / 10^9 \times (10^p - 1)$ Par Gauss

est premier avec $10^p - 1$ tout comme 5 $2^a \times 5^k / 10^9$

donc $2^a \times 5^k$ est premier avec $10^p - 1$

$$10^{r+q} = 10^q \text{ modulo } b$$

$$0 \leq q \leq r+q \leq b-1 \quad (11)$$

$$r \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 10^r = 1 \text{ modulo } c$$

$$\text{et } 10^q = 0 \text{ modulo } 2^g \times 5^h$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} 10^r = 1 \text{ modulo } c \\ \text{et } q \geq \max(g, h) \end{array} \right)$$

$$\text{donc comme } 10^{r+q} = 10^q \text{ modulo } b$$

$$\Rightarrow q \geq \max(g, h)$$

$$\text{donc } w(b) \geq \max(g, h) \text{ d'après 4.1 ii)}$$

$$\text{Réciproquement d'après 1.2 } 10^{\pi(c)} = 1 \text{ modulo } c$$

$$\text{donc si } q \geq \max(g, h)$$

$$10^{\pi(c)+q} = 10^q \text{ modulo } b$$

$$\text{donc } w(b) = \max(g, h)$$

$$\text{soit } \pi(b) \leq \pi(c)$$

$$10^{\pi(b)+w(b)} = 10^{w(b)} \text{ modulo } b \Rightarrow 10^{\pi(b)} = 1 \text{ modulo } c$$

$$\text{donc } \pi(c) \leq \pi(b)$$

$$3. \quad b = 150 = 2^1 \times 3^1 \times 5^2$$

$$\text{donc pre-periode} = 2 \text{ et periode} = 1$$

$$b = 1120 = 2^5 \times 5^1 \times 7^1$$

$$\text{donc pre-periode} = 5$$

$$\text{et periode} = \text{periode de } 7 = 6 \text{ car}$$

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 -0 \\
 \hline
 10 \\
 -7 \\
 \hline
 30 \\
 -28 \\
 \hline
 20 \\
 -14 \\
 \hline
 60 \\
 -56 \\
 \hline
 40 \\
 -35 \\
 \hline
 50 \\
 -49 \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7 \\
 \hline
 0,142857,
 \end{array}$$

$$periode = 6$$

Ponct D

$$1.1 \quad \text{Si } \bar{a} = \bar{a}' \text{ dans } (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$$

$$a - a' = 0 \text{ modulo } b$$

$$\Rightarrow 10a - 10a' = 0 \text{ modulo } b$$

donc

$$\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$$

$$\longrightarrow$$

$$\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$$

$$\bar{a} \longmapsto 10 \times \bar{a} = \overline{10a}$$

est bien défini

$$\overline{10a} = \overline{10a'} \text{ modulo } b$$

$$\Rightarrow 10(a - a') = 0 \text{ modulo } b$$

comme b est premier avec 10

$$a - a' = 0 \text{ modulo } b$$

$$\text{ce d } \bar{a} = \bar{a}'$$

donc injectif

en particulier si $\bar{a} \neq 0$ dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$,

alors $\overline{10} \times \bar{a} \neq 0$ dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$

1.2 On a vu au 1.1 que comme b est premier avec 10, $\overline{10}$ est un élément inversible de $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$, $\times$

de la même façon, on montre que tous les éléments de $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$ sont inversibles

D'après le théorème de Lagrange, l'ordre de $\overline{10}$ divise l'ordre du groupe $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$

$$\text{ord}(\overline{10}) \mid (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* = b-1 \text{ donc } \overline{10}^{b-1} = \overline{1}$$

dans $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$ "Petit théorème de Fermat"

1.3
$$n = mq + r \quad 0 \leq r < m-1$$

$$(x^q - 1) = (x - 1) \left(1 + x + \dots + x^{q-1} \right)$$

$$\text{donc } 10^{mq} - 1 = (10^m - 1) \left(1 + 10^m + \dots + (10^m)^{q-1} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } 10^{mq+r} - 1 &= (10^{mq} - 1) \times 10^r + 10^r - 1 \\ &= (10^m - 1) \times 10^r \times \left(1 + 10^m + \dots + (10^m)^{q-1} \right) + 10^r - 1 \\ &\quad 0 \leq 10^r - 1 < 10^m - 1 \end{aligned}$$

1.4. D'après C,

$\pi(b)$ est le plus petit entier n tq $10^n \equiv 1$

dans le groupe $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$

donc $\pi(b)$ est l'ordre de 10

donc si $10^k \equiv 1$ dans $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$ alors $\pi(b)$ divise k
en particulier d'après 1.2 $\pi(b) \mid b-1$

2. 2.1 Comme b et c sont premiers entre eux,

d'après le Théorème des restes chinois

$$10^n \equiv 1 \text{ modulo } bc$$

$$\text{ssi } 10^n \equiv 1 \text{ modulo } b \text{ et } 10^n \equiv 1 \text{ modulo } c$$

d'après 1.4

$$\Leftrightarrow \pi(b) \mid n \text{ et } \pi(c) \mid n$$

2.2 Par définition $\pi(bc)$ est le plus petit entier

$$\text{tq } 10^n \equiv 1 \text{ modulo } bc$$

$$\Leftrightarrow n \text{ multiple de } \pi(b) \text{ et de } \pi(c)$$

$$\Leftrightarrow n \text{ multiple de } \text{ppcm}(\pi(b), \pi(c))$$

$$\text{donc } \pi(bc) = \text{ppcm}(\pi(b), \pi(c))$$

3. Par définition $10^{\pi(p)} \equiv 1$ modulo p

$$\text{donc } p \text{ divise } 10^{\pi(p)} - 1$$

$$\text{donc } 10^{\pi(p)} - 1 = p \times q$$

Si q admet p comme facteur premier, q sera
ordonné à factoriser par p

$$10^{\pi(p)} - 1 = p^{\pi_p} \times q \quad \pi_p \geq 1 \text{ et } q \text{ premier avec } p$$

3.2 Remarque cas $n < r$ $10^l - 1 = p^r \times q$

implique $10^l - 1 = 0$ modulo p^n donc $\pi(p^n) \leq l$

$10^l = 1$ modulo $p^n \Rightarrow 10^l = 1$ modulo p
donc $\pi(p^n) \geq \pi(p) = l$

donc $\pi(p^n) = l$

3.3 Deuxième cas $n > r$

$$10^l - 1 = p^r \times q \quad q \text{ premier avec } p$$

Demo par récurrence $\forall k \geq 0 \exists Q$ premier avec p

$$\text{tq } 10^{l \times p^k} - 1 = p^{r+k} \times Q$$

$$k=0 \quad 10^l - 1 = p^r \times Q$$

$$\text{d'après 3.2 } \pi(p^r) = l$$

$$\text{Supposons que } 10^{l \times p^k} - 1 = p^{r+k} \times Q$$

Q premier avec p

$$\text{et } \pi(p^{r+k}) = l \times p^k$$

$$10^{l \times p^{k+1}} - 1 = x^p - 1 \quad \text{avec } x = 10^{l \times p^k}$$

$$= (x - 1) \left(1 + x + \dots + x^{p-1} \right)$$

$$= (10^{l \times p^k} - 1) \left[1 + 10^{l \times p^k} + \dots + \left(10^{l \times p^k} \right)^{p-1} \right]$$

$$= p^{r+k} \times Q \times \left[1 + 10^{l \times p^k} + \dots + \left(10^{l \times p^k} \right)^{p-1} \right]$$

$$1 + 10^{l \times p^k} + \dots + \left(10^{l \times p^k} \right)^{p-1} = 1 + 1 + \dots + 1^{p-1} \text{ modulo } p^{r+k}$$

Problème si $r=1$ et $k=0$

maître

$$\left(10^{l \times p^b}\right)^i = \left(1 + p^{x+b} Q\right)^i$$

$$= 1 + i p^{x+b} Q \text{ modulo } p^{2(x+b)}$$

$$\text{donc } \sum_{i=0}^{p-1} \left(10^{l \times p^b}\right)^i = \sum_{i=0}^{p-1} 1 + \sum_{i=0}^{p-1} i p^{x+b} Q \text{ modulo } p^{2(x+b)}$$

$$= p + \frac{p(p-1)}{2} p^{x+b} Q \text{ modulo } p^{2(x+b)}$$

$$= p \text{ modulo } p^2$$

$$\text{car } \frac{p(p-1)}{2} = 0 \text{ modulo } p \text{ vu que } p \neq 2$$

$$\text{donc } \sum_{i=0}^{p-1} \left(10^{l \times p^b}\right)^i \text{ est divisible par } p \text{ mais pas par } p^2$$

$$\text{donc } 10^{l \times p^{b+2}} - 1 = p^{x+b+1} \times Q'$$

où Q' est premier avec p

$$10^b = 1 \text{ modulo } (p^{x+b+1}) \Rightarrow 10^b = 1 \text{ modulo } (p^{x+b})$$

$$\text{donc } l \times p^b = \pi / (p^{x+b}) \text{ modulo } \pi / (p^{x+b+1})$$

$$\text{on a vu } 10^{l \times p^{b+2}} = 1 \text{ modulo } p^{x+b+1} \text{ donc } \pi / (p^{x+b+1}) \text{ modulo } l \times p^{b+1}$$

$$\text{donc } \pi / (p^{x+b+1}) = l \times p^b \text{ ou } l \times p^{b+1}$$

$$\text{Si } \pi / (p^{x+b+1}) = l \times p^b \text{ alors } 10^{l \times p^b} = 1 \text{ modulo } p^{x+b+1}$$

$$\text{ce qui est faux car } 10^{l \times p^b} - 1 = p^{x+b} \times Q \text{ avec } Q \text{ premier avec } p$$

$$\text{donc } \pi / (p^{x+b+1}) = l \times p^{b+1}$$

4.1 periode de 3 = 1

$$\begin{array}{r} 1 \\ -0 \\ \hline 10 \\ -9 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 0,33 \end{array}$$

(17)

$$n = 3$$

$$l = \pi(n) = 1$$

$$10^1 - 1 = 3^2 \times 1$$

periode de $3^2 = \pi(3^2) = 1$ d'après 3.1

$$\pi(3^3) = 1 \times 3^{3-2} = 3$$

$$\pi(3^4) = 1 \times 3^{4-2} = 9$$

periode de 7 = 6

$$10^6 - 1 = 7 \times 142857$$

$$\pi(7^2) = 6 \times 7^{2-1} = 42$$

$$\pi(7^3) = 6 \times 7^{3-1} = 294$$

4.2

$$27783 = 3^4 \times 343 = 3^4 \times 7^3$$

$$\begin{aligned} \pi(27783) &= \text{ppcm}(\pi(3^4), \pi(7^3)) \\ &= \text{ppcm}(9, 6 \times 7^2) = 9 \times 2 \times 7^2 \\ &= 882 \end{aligned}$$

