Luc Menichi

Corrigés CAPES Externe
Math 2014 Exceptionnelle Analyse

Problème 1
Partie A

1. f est continue sur le segment $[a,b]$ compact

Donc d'après le Théorème de Heine,

f est uniformément continue sur $[a,b]$

c.a.d $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ δ indépendant de x et de y

tq $\forall (x,y) \in [a,b]^2$

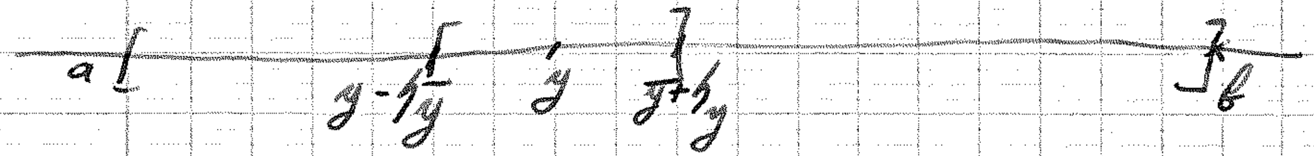
$$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

preuve du Th de Heine

$\forall y \in [a,b]$ f est continue en y

c.a.d $\forall y \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_y > 0$ δ_y dépendant de y

tq $\forall x$ $|x-y| \leq \delta_y \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$



Les intervalles $]y-\delta_y, y+\delta_y[$ où $y \in [a,b[$

forment un recouvrement d'ouverts de $[a,b]$

Comme $[a,b]$ compact, on peut extraire un sous-

· recouvrement fini $]y_i - h_{y_i}, y_i + h_{y_i}[$

pour i variant de 1 à un entier p

Soit $h = \min\limits_{1 \leq i \leq p} h_{y_i}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $y \in [a,b]$.

y appartient à un $]y_i - h_{y_i}, y_i + h_{y_i}[$

Je n'y arrive pas cours Sup

2.2.1

$\forall t \in [x_k, x_{k+1}]$

$0 \leq t - x_k \leq \dfrac{b-a}{n}$

Or $\lim \dfrac{b-a}{n} = 0$ donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tq

$\forall n \geq N \quad \dfrac{b-a}{n} < \delta$

Donc d'après 1. comme $|t - x_k| < \delta$

$|f(t) - f(x_k)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

2.2 $\quad \forall t \in [x_k, x_{k+1}]$

$$-\frac{\varepsilon}{b-a} \leq f(t) - f(x_k) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

d'où

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{-\varepsilon}{b-a}\, dt \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(f(t) - f(x_k)\right) dt \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\varepsilon}{b-a}\, dt$$

c a d

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) - f(x_k)\, dt \right| \leq (x_{k+1} - x_k) \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon/n$$

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt - (b-a)\, S_n(f) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, dt - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\, dt \right) \right|$$

$$< \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon/n = \varepsilon$$ d'après l'inégalité précédente

3. Au 2.2. on a démontré que

$$\lim_{n \to +\infty} (b-a)\, S_n(f) = \int_a^b f(t)\, dt$$

En divisant par $(b-a)$

la suite $S_n(f)$ converge vers $\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$

$$R_n(f) - S_n(f) = \frac{f(b) - f(a)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc la suite $R_n(f)$ converge aussi vers

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt$$

4°) $u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j/n+1}$

$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j+1} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)$

si on prend $f(t) = \ln(1+t)$ sur $[0,1]$

D'après 3°),

u_n converge vers $\frac{1}{1-0}\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \left[\ln(1+t)\right]_0^1 = \ln 2$

5°) 5.1 f' est continue sur le segment $[a,b]$

donc bornée c à d $\exists M \in \mathbb{R}$ tq

$\forall t \in [a,b] \quad |f'(t)| \leq M$

5.2. D'après l'inégalité des Accroissements finis

$|f(t) - f(x_k)| \leq M(t - x_k)$

5.3

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,dt\right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} M(t - x_k)\,dt$$

$$= M\left[\frac{t^2}{2} - t x_k\right]_{x_k}^{x_{k+1}} = M\left[\frac{(t-x_k)^2}{2}\right]_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$= M \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} = \frac{M}{2} \left(\frac{b-a}{n}\right)^2$$

Comme en 2.2.

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt - (b-a)\, S_n(f) \right|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| f(t) - f(x_k) \right| dt$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{2} \frac{(b-a)^2}{n^2} = \cancel{n} \frac{M}{2} \frac{(b-a)^2}{n^{\cancel{2}}}$$

5°) $f(x) = e^{-x^2}$

6.1 $f'(x) = -2x\, e^{-x^2}$

$\forall x \in [0.1] \quad |f'(x)| = 2|x|\, e^{-x^2} \leqslant 2 \times 1 \times e^0$

$M = 2$ marche

6.2 D'après 5.3

$$\left| \int_0^1 e^{-x^2} dx - S_n(f) \right| \leqslant \frac{1}{n}$$

Menichi (4)

Soit n un entier tel que $1/n \leq \mathcal{E}$

pour calculer $\int_0^1 e^{-x^2}\,dt$ à $\mathcal{E}$ près,

il suffit de calculer $S_n(f) = 1/n\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{-k^2/n^2}\right)$

cas $\mathcal{E} = 10^{-3}$ on peut prendre $n = 1000$

$$S_{1000}(f) = \frac{1}{1000} \sum_{k=0}^{999} e^{-k^2/1000^2}$$

Algorithme

Soit n = le plus petit entier supérieur ou égal à $1/\varepsilon$

$S = 0$

Pour k variant de 0 à $n-1$

$S = S + e^{-k^2/n^2}$

fin de la boucle

$S = S/n$

en Scilab

$n = 1000$

$k = 0 : n-1$

$k.\wedge 2$

$$\frac{\text{sum}(\exp(-k.\wedge 2/n\wedge 2))}{n} = \frac{747,14013}{1000}$$

$= 0,747$

Partie B

1. $\forall 1 \leq k \leq n-1 \quad \forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \subset \left]0,1\right]$

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{car } f \text{ décroissante}$$

Donc

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2. Donc

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{1/n}^{\frac{n-1+1}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

c à d

$$z_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq z_n - \frac{1}{n} f(1)$$

3. Th des Gendarmes

$$I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1) \leq z_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \; n \longrightarrow +\infty$$

$$l + 0 \times f(1) \qquad\qquad l + 0$$

donc $\lim z_n = l$

4°) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{4} - \dfrac{\ln x}{2}$

$$f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) \leq 0 \text{ si } x \in \left]0,1\right]$$

4.1

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2/n^2 - 1}{4} - \frac{1}{2} \ln \frac{k}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 \right) \times \frac{1}{4n^2} - \frac{n}{4n} - \frac{1}{2n} \ln \frac{n!}{n^n}$$

$$= \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6 \times 4n^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} \ln \frac{n!}{n^n}$$

4.2

$$x\, f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

$$I(x) = \int_x^1 \frac{t^2-1}{4} - \frac{\ln t}{2} \, dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{12} - \frac{t}{4} - \frac{t \ln t}{2} + \frac{t}{2} \right]_x^1$$

$$= \left[\frac{t^3}{12} + \frac{t}{4} - \frac{t \ln t}{2} \right]_x^1$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{4} - 0 - \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + \frac{x \ln x}{2}$$

$$\xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

Donc la suite x_n converge vers $1/3$

Donc la suite $\frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} = \ln \frac{n!^{1/n}}{n}$

converge vers l tel que

$$1/3 = \frac{2}{24} - 1/4 - \frac{1}{2} l$$

donc $2/3 = 2/12 - 1/2 - l$

$$l = 1/6 - 1/2 - 2/3 = \frac{1-3-4}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

donc $\frac{n!^{1/n}}{n}$ converge vers e^{-1}

Partie C

1°) $\forall x \in \left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$

$$k\pi \leq nx \leq (k+1)\pi$$

donc $\sin nx = (-1)^k \underbrace{\sin(nx - k\pi)}_{\text{de signe positif}}$

Donc $|\sin(nx)| = (-1)^k \sin nx$

Donc $$\int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} |\sin nx|\, dx = (-1)^k \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} \sin nx \, dx$$

$$= (-1)^k \left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n}$$

$$= \frac{(-1)^k}{n}\left(\cos k\pi - \cos(k+1)\pi\right)$$

$$= \frac{(-1)^k}{n}\left[(-1)^k - (-1)^{k+1}\right] = 2/n$$

2.1

$$|\sin(nx)|\, f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \gtreqless f(x)\,|\sin nx| \gtreqless f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) |\sin nx|$$

d'où en intégrant

$$\frac{2}{n}\, f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \gtreqless \int_{k\pi/n}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)\,|\sin nx|\, dx \gtreqless f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) \int_{k\pi/n}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin nx|\, dx$$

2.2

$$\begin{array}{ccccc} 2\, S_n(f) & & & & 2\, R_n(f) \\ \| & & & & \| \\ \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) & \gtreqless & \int_0^{\pi} f(x)\,|\sin nx|\, dx & \gtreqless & \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) \\ & & & & \| \\ & & & & \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) + f(\pi) - f(0) \end{array}$$

2.3 Comme f continue sur $[0,\pi]$ d'après A.3

$S_n(f)$ et $R_n(f)$ converge vers $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\, dt$

donc $$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} f(x)\,|\sin(nx)|\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\, dt$$

2.4 f décroissante on même résultat

Partie D

1.1

$$I_{k,n} = \int_0^1 x^k (1-x)^m \, dx$$

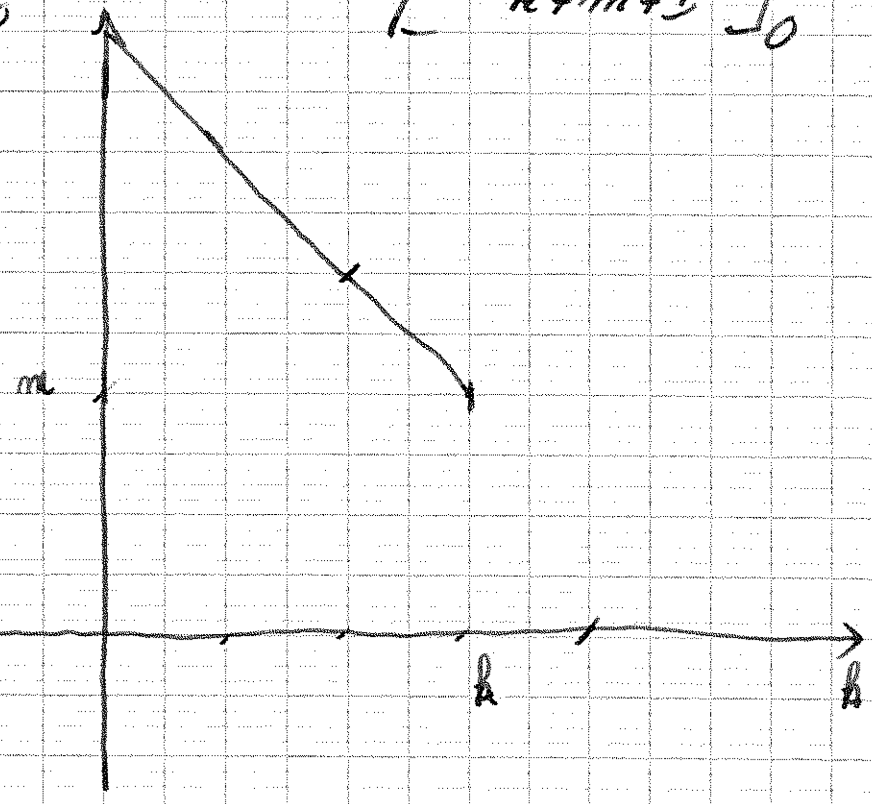
$$= \left[x^k \times \frac{-(1-x)^{m+1}}{m+1} \right]_0^1 + \int_0^1 k\, x^{k-1} \frac{(1-x)^{m+1}}{m+1}$$

$$= \frac{k}{m+1} I_{k-1,\, m+1}$$

1.2

$$I_{0,k+m} = \int_0^1 (1-x)^{k+m} \, dx = \left[\frac{-(1-x)^{k+m+1}}{k+m+1} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{k+m+1}$$



$$I_{k,m} = \frac{k}{m+1} I_{k-1,\, m+1}$$

$$I_{k-1,\, m+1} = \frac{k-1}{m+2} I_{k-2,\, m+2}$$

$$\vdots$$

$$I_{1,\, m+k-1} = \frac{1}{m+k} I_{0,\, m+k}$$

$$I_{0,\, m+k} = \frac{1}{m+k+1}$$

donc $$I_{k,m} = \frac{k!}{(m+1)(m+2) \cdots (m+k+1)} = \frac{1}{\binom{m+k+1}{k}}$$

2.

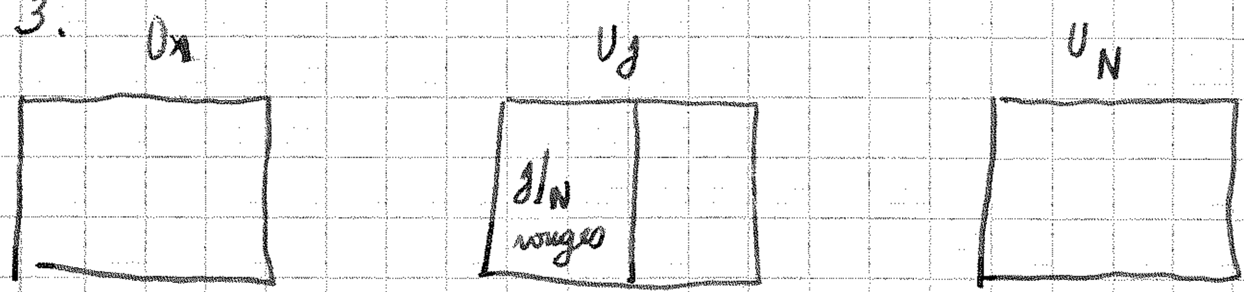
p % rouges	1-p blanches

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

X suit une loi binomiale de paramètres n et p

$$E(X) = np$$

3.



3.1 Probabilité d'avoir choisi l'urne $j = 1/N$

$$P\left(X_N = k \,/\, U_j\right) = \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k}$$

D'après formule des probabilités totales

$$P\left(X_N = k\right) = \sum_{j=1}^{N} P\left(X_N = k \,/\, U_j\right) P\left(U_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k} \times \frac{1}{N}$$

3.2

$$E\left(X_N\right) = \sum_{k=0}^{n} P\left(X_N = k\right) \times k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{N} P\left(X_N = k \,/\, U_j\right) P\left(U_j\right) \times k$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n} P\left(X_N = k / U_j\right) k \right) \times P(U_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} E\left(\text{Urne } U_j\right) \times P(U_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} n \times \frac{j}{N} \times \frac{1}{N}$$

$$= \frac{n}{N^2} \frac{N(N+1)}{2} = \frac{n(N+1)}{2N} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{n}{2}$$

3.3. Soit $f(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

D'après A. 3

$$p_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f\left(\frac{j}{N}\right) = R_N(f)$$

$$\xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{1-0} \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx$$

$$= \binom{n}{k} \times I_{k,\, n-k}$$

$$= \frac{n\ (n-1) \dots (n-k+1)}{\cancel{k!}} \times \frac{\cancel{k!}}{(n-k+1)(n-k+2) \dots n\ \ n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

la suite de variables aléatoires X_N

converge en loi vers la loi uniforme

sur $\{0, \quad , n\}$

Problème 2

A.

1.1 $\left(f(x)\, f(-x)\right)' = f'(x)\, f(-x) + f(x)\left(-f'(-x)\right)$

$= f(x)\, f(-x) + f(x)\left(-f(-x)\right) = 0$

Donc $f(x)\, f(-x)$ est égale à une constante C

Prenons $x = 0$ alors $f(0)\, f(-0) = 1 \times 1 = C$

donc $C = 1$

1.2 $\forall x \in \mathbb{R}\; f(x) \neq 0$ car d'après 1.1 $f(x)$ est inversible

1.3 $\varphi'(x) = \dfrac{g'(x)\, f(x) - f'(x)\, g(x)}{f(x)^2}$

$= \dfrac{g(x)\, f(x) - f(x)\, g(x)}{f(x)^2} = 0$

donc $\varphi(x) =$ constante C

pour $x = 0$ $\varphi(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = \dfrac{1}{1}$ donc $C = 1$

donc $\varphi(x) = 1$ c.a.d $g(x) = f(x)$

1.4 $\psi'(x) = \dfrac{f'(a+x)}{f(a)} = \dfrac{f(a+x)}{f(a)} = \psi(x)$

$\psi(0) = \dfrac{f(a)}{f(a)} = 1$

donc ψ solution de E telle que $\psi(0) = 1$

Donc d'après I.3 $\psi(x) = f(x)$

c a d $f(a+x) = f(a) f(x)$

1.5 f continue sur $\mathbb{R}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

donc garde un signe constante

qui est positif car $f(0) = 1 > 0$

2.21 $\forall n$ tq $n > |x|$

$-n < x < n$

donc $0 < n+x$

donc $u_n(x) = \left(\dfrac{n+x}{n}\right)^n > 0$

donc $u_n(x) > 0$ pour $|x| < n$

donc $v_n(x) = \dfrac{1}{u_n(-x)}$ est bien défini

2.2 Démo par récurrence $\forall n \geq 1$ $(1+a)^n \geq 1+na$

cas $n = 1$ $1+a \geq 1+1\times a$

Supposons vrai au rang n

$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n (1+a) \geq (1+na)(1+a)$

$= 1+na+a+na^2 \geq 1+(n+1)a$

(11)

2.3 i) $u_{n+1}(x) = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)$

ii) $$\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{\frac{x}{n+1}-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}$$

$$\geqslant 1+(n+1)\frac{\frac{x}{n+1}-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}} = \frac{1+x/n+x-\frac{(n+1)x}{n}}{1+\frac{x}{n}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{x}{n}}$$

iii) d'apres i) et ii)

$$u_{n+1} \geqslant u_n(x)\cancel{\left(1+\frac{x}{n}\right)}\cancel{\frac{1}{1+\frac{x}{n}}}$$

donc $u_n(x)$ est une suite croissante

2.4 $u_n(-x)$ suite croissante positive d'ou

donc $v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}$ est decroissante

2.5 i)

$$v_n(x) - u_n(x) = v_n(x)\left(1-\frac{u_n(x)}{v_n(x)}\right)$$

$$= v_n(x)\left(1-u_n(x)\,u_n(-x)\right)$$

$$= v_n(x)\left(1 - \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)\right]^n\right)$$

$$= v_n(x)\left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right]$$

ii) si $n > |x|$

alors $n^2 > x^2 \quad 1 \geqslant 1 - \frac{x^2}{n^2} > 0$

donc $1 \geqslant \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n > 0$

donc $1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geqslant 0$

donc $v_n(x) - u_n(x) \geqslant 0$ car $v_n(x) > 0$

iii) $\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geqslant 1 - n\frac{x^2}{n^2} = 1 - x^2/n$

donc $1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \leqslant x^2/n$

donc $v_n(x) - u_n(x) \leqslant v_n(x) \times \frac{x^2}{n}$

2.6 la suite $v_n(x)$ est decroissante positive

donc convergente

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n(x) \frac{x^2}{n} = 0$

Comme $\forall n > |x|$

$$0 \leqslant v_n(x) - u_n(x) \leqslant v_n(x) \frac{x^2}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} v_n(x) - u_n(x) = 0$$

comme la suite $u_n(x)$ est croissante, $v_n(x)$ est decroissante

les suites $u_n(x)$ et $v_n(x)$ sont adjacentes

2. 7

i) $f(0) = \lim u_n(0) = \lim \left(1+\frac{0}{n}\right)^n = 1$

ii) $f(x_0+h) - f(x_0) \geq h\, f(x_0)$

$a = x_0 + h \quad k = -h$

$f(x_0 + h - h) - f(x_0+h) \geq -h\, f(x_0+h)$

donc $f(x_0+h) - f(x_0) \leq h\, f(x_0+h)$

donc $(1-h)\, f(x_0+h) \leq f(x_0)$

donc $(1-h)\, f(x_0+h) + (h-1)\, f(x_0) \leq h\, f(x_0)$

c a d $(1-h)\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) \leq h\, f(x_0)$

iii) Donc

$$f(x_0) \leq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq \frac{f(x_0)}{1-h} \xrightarrow[\text{quand } h \to 0]{} f(x_0)$$

donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f(x_0)$

c à d f dérivable de dérivée $f(x_0)$.

donc f vérifie E et $f(0) = 1$

Problème 2 Partie B

$$y' = r y \left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

1.

$y' = F(t, y)$ F de classe C^1

D'après le Th de Cauchy-Lipschitz,

cet équa dif admet une unique solution maximale N.

2.1 $N'(t) = r N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) > 0$ car

$N(t) > 0$ et $N(t) < K$ donc $\frac{N(t)}{K} < 1$ donc $1 - \frac{N(t)}{K} > 0$

2.2 N croissante bornée donc admet une limite finie ℓ en $+\infty$

2.3 Forcément comme $0 < N(t) < K$

$0 \leqslant \ell \leqslant K$ $\ell \neq 0$ car N croissante

Supposons $\ell < K$

alors $N'(t) = r N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \xrightarrow[t \to +\infty]{} r \ell \left(1 - \frac{\ell}{K}\right) > 0$

donc $\exists A \in \mathbb{R}$ tq $\forall t \geqslant A$

$N'(t) > \frac{r\ell}{2} \left(1 - \frac{\ell}{K}\right)$

donc $N(t) - N(A) \geqslant \frac{r\ell}{2}\left(1-\frac{\ell}{K}\right)(t-A)$

donc $\lim_{t \to +\infty} N(t) = +\infty$ contradiction

3.1.

$$g'(t) = \frac{-N'(t)}{N^2} = \frac{-rN\left(1-\frac{N}{K}\right)}{N^2}$$

$$= -\frac{r}{N} + r/K = -r\,g(t) + r/K$$

3.2 E' équation différentielle linéaire avec second membre et coefficients constants

$-ry + \frac{r}{K} = 0 \iff y = 1/K$

donc $y = 1/K$ solution particulière

$y' = -ry \iff y'/y = -r$

$\ln y = -rt \qquad y = Ce^{-rt}$

Les solutions générales de E' sont $y(t) = Ce^{-rt} + 1/K$ où C constante réelle

$0 < N_0 < K$ donc $0 < 1/K < 1/N_0 = y(0) = C + 1/K$

donc $C > 0 \qquad C = 1/N_0 - 1/K$

14

$$y(t) = \left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}\right) e^{-rt} + \frac{1}{K} > 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

donc $$N(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}\right) e^{-rt} + \frac{1}{K}}$$

3.3 $$N(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} K$$