

I. 3 a) Dans le cas $n \geq 2$

$$(x_1, \dots, x_n) \in B_n \Leftrightarrow x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2$$

$$\Leftrightarrow x_n^2 \leq R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2$$

$$\text{et } |x_n| \leq \sqrt{R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B_{n-1}$$

$$\text{et } -\sqrt{R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2} \leq x_n \leq \sqrt{R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}$$

Démontrons par récurrence que B_n est continuellement paramétrisable

$$n=1 \quad B_1 = \{x_1 \in \mathbb{R} \text{ tq } x_1^2 \leq R^2\} = [-R, R]$$

est un segment donc continuellement paramétrisable

Supposons B_{n-1} continuellement paramétrisable.

alors

$$B_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B_{n-1}\}$$

$$\text{et } -\sqrt{R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2} \leq x_n \leq \sqrt{R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}$$

est continuellement paramétrisable

g)
$$\int_{-\lambda}^{\lambda} (\lambda^2 - x^2)^{m/2} dx = 2 \int_0^{\lambda} (\lambda^2 - x^2)^{m/2} dx$$

par suite de la fonction $x \mapsto (\lambda^2 - x^2)^{m/2}$

Posez $x = \lambda \sin t$

$dx = \lambda \cos t$ alors

$$2 \lambda \int_0^{\pi/2} \cos^{m+1} t dt = 2 \int_0^{\pi/2} \lambda \sqrt{1 - \sin^2 t} \lambda \cos t dt$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} (\lambda^2 - \lambda^2 \sin^2 t)^{m/2} \lambda \cos t dt$$

$$= 2 \int_0^{\lambda} (\lambda^2 - x^2)^{m/2} dx \quad \square$$

gh 27

c) Soit par récurrence finie sur k
compris entre 1 et $n-1$.

$$k=1$$

$$V_n = \int_{\beta_{n-1}} \int_{-\sqrt{R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}}^{\sqrt{R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}} dx_n da_{n-1} da_1$$

$$= \int_{\beta_{n-1}} 2 \sqrt{R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2} da_{n-1} da_1$$

$$\text{ce } W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1$$

donc

$$V_n = 2^1 W_1 \int_{\beta_{n-1}} \left(R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2 \right)^{1/2} da_{n-1} da_1$$

Supposons que

$$V_n = 2^{k-1} \pi^{k-1} W_k \int_{\beta_{n-k+1}} \left(R^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-k+1}^2 \right)^{\frac{k-1}{2}} dx_{n-k+1} da_{n-k+1} da_1$$

$$= 2 \prod_{i=1}^{k-1} W_i \int_{\beta_{n-k}}^{\beta_{n-k}} \left(\frac{R^2 - x_1^2 - x_{m-k}^2}{-x_{m-k}^2} \right)^{\frac{k-1}{2}} dx_{n-k} \quad (4)$$

d'après I.3.B avec $\lambda = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_{m-k}^2}$

et $m = k-1$

$$= 2 \prod_{i=1}^{k-1} W_i \int_{\beta_{n-k}}^{\beta_{n-k}} \left(\frac{R^2 - x_1^2 - x_{m-k}^2}{-x_{m-k}^2} \right)^{\frac{k-1}{2}} \frac{W}{R^{k-1}} dx_{n-k}$$

d) on prend $k = n-1$ dans c) dans le cas $n \geq 2$

$$V_n = 2 \prod_{i=1}^{n-1} W_i \int_{\beta_1}^{\beta_1} (R^2 - x_1^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_1$$

d'après I.3.B $\lambda = R$

$m = n-1$

$$= 2 \prod_{i=1}^{n-1} W_i \cdot 2 R^{\frac{n-1}{2}} W_n \quad \square$$

car $n = 1$

$$V_1 = \int_{\beta_1}^{\beta_1} dx_1 = 2R = W_1 \cdot 2R \text{ car } W_1 = 1$$

(5)

$$V_{2k} = \begin{pmatrix} W_1 & W_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W & W \\ 2k-1 & 2k \end{pmatrix} 2^{2k} R^{2k}$$

d'après 1 et e)

$$= \frac{\pi}{2^{1+1}} \quad \frac{\pi}{2^{(2k-1)+1}} \quad 2^{2k} R^{2k}$$

$$= \frac{\pi^k}{2^k 2^k k!} \quad 2^{2k} R^{2k}$$

$$V_{2k+1} = W_1 \begin{pmatrix} W_2 & W_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W & W \\ 2k & 2k+1 \end{pmatrix} 2^{2k+1} R^{2k+1}$$

$$= 1 \times \frac{\pi}{2 \times 3} \quad \frac{\pi}{2 \times (2k+1)} \quad 2^{2k+1} R^{2k+1}$$

$$= \frac{\pi^k}{2^k} \frac{1}{3 \times 5 \times \dots \times (2k+1)} \quad 2^{2k+1} R^{2k+1}$$

$$= \frac{\pi}{2^k} \frac{k!}{(2k+1)!} \quad 2^{2k+1} R^{2k+1}$$

10h08

$$k=0$$

$$V_1 = 2 R$$

$$V_2 = \pi R^2$$

$$V_3 = 2^3 \frac{1}{3!} \pi R^3$$

$$= \frac{4 \pi R^3}{3}$$

$$A=2$$

$$V_4 = \frac{\pi^2}{2} R^4$$

c)

$$V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} R^{2k} \sim \frac{\pi^k R^{2k}}{\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}}$$

$$\sim \frac{(e\pi)^k R^{2k}}{k^k \sqrt{2\pi k}}$$

$$V_{2k+1} = 2^{2k+1} \frac{\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}}{\left(\frac{2k+1}{e}\right)^{2k+1} \sqrt{2\pi(2k+1)}} \pi^k R^{2k+1}$$

$$\sim 2^{2k+1} \frac{k^k e^{k+1}}{(2k+1)^{2k+1}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^k R^{2k+1}$$

$$= 2^{2k+\frac{1}{2}} \frac{k^k}{(2k+1)^{2k+1}} e^{k+1} \pi^k R^{2k+1}$$

10h23

équivalent plus simple pour V_{2k+1}

$$\begin{aligned} \frac{(2k+1)^{2k+1}}{(2k)^{2k+1}} &= \left(\frac{2k+1}{2k} \right)^{2k+1} = \left(1 + \frac{1}{2k} \right)^{2k+1} \\ &= e^{(2k+1) \ln \left(1 + \frac{1}{2k} \right)} = e^{(2k+1) \left(\frac{1}{2k} + o\left(\frac{1}{k}\right) \right)} \\ &= e^{1 + o(1)} \xrightarrow{\text{quand } k \rightarrow +\infty} e^1 \end{aligned}$$

donc $(2k+1)^{2k+1} \sim e (2k)^{2k+1}$

donc $V_{2k+1} \sim \frac{2^{2k+1} k^k e^{k+1}}{e (2k)^{2k+1} \sqrt{2}} \pi^k R^{2k+1}$

$$= \frac{e^k}{k^{k+1}} \frac{\pi^k R^{2k+1}}{\sqrt{2}}$$

2^{ème} méthode

$$\begin{aligned} V_{2k+1} &= V_{2k} W_{2k+1} 2R \\ &\sim \frac{e^k \pi^k R^{2k}}{k^k \sqrt{2} \pi^k} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2(2k+1)}} 2R \\ &\sim \frac{e^k \pi^k R^{2k+1}}{k^k \sqrt{2}} \times \frac{1}{k} \end{aligned}$$

$$B/ \quad V_{2k} \sim \left(\frac{e \pi R^2}{k} \right)^k \times \frac{1}{\sqrt{2 \pi k}}$$

autre méthode

Pour $k \gg e \pi R^2$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{4 k e \pi R^2}{(2k+1)^2} \right]^k = 0^\infty = 0$

$\left(\frac{e \pi R^2}{k} \right)^k < 1^k = 1$ donc $\lim_{k \rightarrow \infty} V_{2k+1} = 0$. De même $\lim_{k \rightarrow \infty} V_{2k} = 0$

donc $0 \leq \left(\frac{e \pi R^2}{k} \right)^k \frac{1}{\sqrt{2 \pi k}} \leq \frac{1}{\sqrt{2 \pi k}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$

donc $\lim_{k \rightarrow \infty} V_{2k} = 0$

$$V_{2k+1} \sim \sqrt{2} \frac{4^k k^k}{[(2k+1)^2]^k} \times \frac{1}{2k+1} e^k \pi^{k/2} \left(\frac{R}{k} \right)^k e R$$

$$= \sqrt{2} e R \left[\frac{4 k e \pi R^2}{(2k+1)^2} \right]^k \times \frac{1}{2k+1}$$

Comme $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{(2k+1)^2} = 0$

Pour k assez grand $\left[\frac{4 k e \pi R^2}{(2k+1)^2} \right]^k < 1^k = 1$

donc $0 \leq \sqrt{2} e R \left[\frac{4 k e \pi R^2}{(2k+1)^2} \right]^k \frac{1}{2k+1} \leq \frac{\sqrt{2} e R}{2k+1} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} V_{2b+1} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{2b}$

(8)

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = 0$

10h34

g) d'après 1.3. d

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = W_{n+1} \cdot 2R \longrightarrow 0 \times 2R$$

d'après 1.1. g

donc à partir d'un certain rang n_0

$$W_{n+1} \cdot 2R \leq 1$$

c a d $V_{n+1} \leq V_n$

la suite V_n est décroissante à partir de n_0

Si $W_2 \cdot 2R \leq 1$ d'après 1.1. b

W_n est décroissante donc $\frac{V_{n+1}}{V_n} = W_{n+1} \cdot 2R \leq W_2 \cdot 2R \leq 1$

donc la suite est décroissante dès $n_0 = 0$

Si $W_2 \cdot 2R > 1$ comme W_n est décroissante

$W_{n+1} \cdot 2R$ sera supérieur ou égal à 1

pour qu'il y ait un rang n_0 et inférieur ou égal à 1 après.

(3)

donc la suite V_n sera croissante jusqu'à un
certain n_0 et décroissante après

b)

V_n commence à partir de $n = 1$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = W_{n+1} \cdot R$$

donc $W_2 \cdot R < 1 \Leftrightarrow$ la suite V_n
est décroissante dès le départ $n \geq 1$

$$W_2 \cdot R = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R < 1 \text{ ou } R < \frac{2}{\pi}$$

d'après i. i. d

a) quand $R = 1$

$$W_2 \cdot R = \frac{\pi}{2} > 1$$

10 h 57

donc $n_0 \neq 2$

$$W_3 \cdot R = \frac{2^2}{3!} \cdot 2 = \frac{4}{3} > 1$$

$$W_4 \cdot R = \frac{4!}{2^4 \times (2!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8} > 1$$

$$W_5 \cdot R = \frac{2^4 (2!)^2}{5!} \cdot 2 = \frac{16}{15} > 1$$

$$W_6 \cdot R = \frac{6!}{2^6 (3!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{16} < 1 \text{ donc } n_0 = 5$$

II.

(10)

1. a) Soit $P = a_n x^n + \dots + a_0$

$$Q' = P \iff Q = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + b$$

$$\int_0^1 Q(x) dx = 0 \iff \int_0^1 \sum_{i=0}^n a_i \frac{x^{i+1}}{i+1} dx + \int_0^1 b dx = 0$$

$$\iff b = - \int_0^1 \sum_{i=0}^n a_i \frac{x^{i+1}}{i+1} dx$$

donc Q est unique

b)

Par définition $B_0(x)$ est le polynôme constant égal à 1.

Supposons B_{n-1} défini

d'après a) il existe un unique polynôme B_n tq

$$B_n' = n B_{n-1} \text{ et } \int_0^1 B_n(x) dx$$

17/17

$$c/ \quad b_0(x) = 1 \quad b_0 = 1$$

$$b_1(x) = x + b_1$$

$$b_1 = - \int_0^1 x \, dx = \left[-\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

$$b_1(x) = x - \frac{1}{2} \quad b_1 = -\frac{1}{2}$$

$$2b_1(x) = 2x - 1$$

$$b_2(x) = x^2 - x + b_2$$

$$b_2 = \int_0^1 (-x^2 + x) \, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$b_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$3b_2(x) = 3x^2 - 3x + \frac{1}{2}$$

$$b_3(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} + b_3$$

$$b_3 = \int_0^1 \left(-x^3 + \frac{3x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$$

$$4B_3(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + B_4$$

$$B_4 = \int_0^1 (-x^4 + 2x^3 - x^2) dx$$

$$= \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{2x^4}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{6+15-10}{30} = -\frac{1}{30}$$

2.

a) démontrons par récurrence que $P_n(x)$ est de degré n .

$n=0$ $P_0(x)$ est de degré 0

Comme P_{n-1} est de degré $n-1$.

$P'_n = n P_{n-1}$ implique P_n de degré n

b) $\forall n \geq 2$

$$P_n(1) - P_n(0) = \int_0^1 P'_n(x) dx$$

$$= \int_0^1 n P_{n-1}(x) dx = n \int_0^1 P_{n-1}(x) dx$$

$$= n \times 0 = 0 \text{ car } n-1 \geq 1.$$

11h50

c) cas $n=0$

$$P_0(x) = 1 = e_0 x^0$$

Supposons que

$$B_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} b_{n-1-k} x^k$$

alors

$$n B_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} b_{n-1-k} x^k$$

donc

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} b_{n-1-k} \frac{x^{k+1}}{k+1} + b_n$$

Poseons $k' = k+1$

$$= \sum_{k'=1}^n n \binom{n-1}{k'-1} b_{n-k'} \frac{x^{k'}}{k'} + b_n$$

Or :

$$n \binom{n-1}{k-1} = \frac{n (n-1)!}{(k-1)! (n-1-(k-1))!}$$

$$\frac{n!}{(k-1)! (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

12h

donc
$$P_m(x) = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} b_{m-k} x^k + b_m \quad \square$$

d) $\forall m \geq 2$ d'après b)

$$P_m'(0) = P_m'(1)$$

c est a donc d'après c)

$$b_m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} b_{m-k} \quad \cancel{= 0}$$

donc
$$\sum_{k=1}^m \binom{m}{k} b_{m-k} = 0$$

donc
$$\binom{m}{1} b_{m-1} + \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} b_{m-k} = 0$$

donc
$$b_{m-1} = -\frac{1}{m} \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} b_{m-k}$$

comme $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$b_{m-1} = -\frac{1}{m} \sum_{k=2}^m \binom{m}{m-k} b_{m-k}$$

Formule $A = n - H$

$$b_{n-1} = -\frac{1}{n} \sum_{h'=0}^{n-1} \binom{n}{h'} b_{h'}$$

pour tout $n \geq 2$

16

donc $\forall n \geq 1$ en remplaçant $n-1$ par n

$$b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n+1}{h} b_h$$

$$\text{donc } b_5 = -\frac{1}{6} \left(\binom{6}{0} b_0 + \binom{6}{1} b_1 + \binom{6}{2} b_2 \right.$$

$$\left. + \binom{6}{3} b_3 + \binom{6}{4} b_4 \right)$$

$$\frac{6 \times 5}{2} = 15$$

$$= -\frac{1}{6} \left(1 \times 1 + 6 \times -\frac{1}{2} + 15 \times \frac{1}{6} \right.$$

$$\left. + \binom{6}{3} \times 0 + 15 \times -\frac{1}{30} \right)$$

$$= -\frac{1}{6} \left(1 - 3 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= -\frac{1}{6} \left(-\frac{5}{2} + \frac{5}{2} \right) = 0$$

$$b_6 = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} b_0 + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} b_2$$

$$+ \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} b_3 + \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} b_4 + \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} b_5$$

$$= -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 7 \times (-\frac{1}{2}) + \frac{7 \times 8}{2} \times \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{7 \times 8 \times 5}{6} \times -\frac{1}{30}$$

$$= -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 - \frac{7}{2} + \frac{7}{6} - \frac{7}{6} \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \times -\frac{1}{6} = \frac{1}{42}$$

12h25

e) $b_0 = 1 \in \mathbb{Q}$

d'après d) par récurrence

si $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{Q}$

alors $b_n \in \mathbb{Q}$

donc d'après e) $b_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$

f) il pour $n=0$

$$c_0(x) = (-1)^0 b_0 (1-x) = 1$$

$$C'_m(x) = (-1)^n (-1) B'_m(1-x)$$
$$= (-1)^{n-1} n B_{n-1}(1-x)$$

$$\int_0^1 C'_m(x) dx = n \int_0^1 (-1)^{n-1} B_{n-1}(1-x) dx$$

$u = 1-x \quad du = -dx$
 $\int_1^0 (-1)^n B_n(u) (-du) = 0$

d'après II. 1. b on a donc $C_n(x) = B_n(x)$.

12h33

g)

on a donc $\forall n \geq 0$

$$B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$$

en prenant $x = 0$

$$B_n(0) = (-1)^n B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$$

d'après II. 2. b si $n \geq 2$

$$\text{donc } (1 - (-1)^n) B_n(0) = 0$$

$$\text{donc pour } n \text{ impair } \geq 2 \quad B_n(0) = B_n = 0$$

$$\text{c à d } \forall n \geq 1 \quad B_{2n+1} = 0$$

en prenant $x = 1/2$

de même pour n impair ≥ 0

$$B_n(1/2) = 0$$

12h37

1. 3 a) Quitte à remplacer P par $-P$

(18 pts)

on peut supposer que P est positif.

Soit $x_0 \in [0, 1]$ tel que $P(x_0) \neq 0$ donc $P(x_0) > 0$

Comme P est continue en x_0 , il existe un segment $[\alpha, \beta]$ de longueur non nulle contenant x_0 tel que

$$P(x) \geq \frac{P(x_0)}{2} \text{ pour tout } x \in [\alpha, \beta]$$

d'où

$$\int_0^1 P(x) dx = \int_0^\alpha P(x) dx + \int_\alpha^\beta P(x) dx + \int_\beta^1 P(x) dx$$

$$\geq \int_0^\alpha 0 dx + \int_\alpha^\beta \frac{P(x_0)}{2} dx + \int_\beta^1 0 dx$$

$$= 0 + \frac{P(x_0)}{2} (\beta - \alpha) + 0 > 0$$

X. 4. 4 Lelong - Frenaud - Arnaud des Analyse

donc on a démontré que

si P n'est pas le polynôme nul et de signe constant sur $[0, 1]$ alors $\int_0^1 P(x) dx \neq 0$

II 3

(19)

a) Quelle est la relation $P_{\text{pas}} - P$?on peut supposer que P est positifComme P est continue sur le segment $[0, 1]$ P admet un minimum

$$m = P(x_0) > 0$$

$$P(x) \geq m > 0$$

$$\text{donc } \int_0^1 P(x) dx \geq \int_0^1 m dx = m(1-0) > 0$$

donc si P ne s'annule pas sur $[0, 1]$ alors $\int_0^1 P(x) dx \neq 0$

b) d'après II. 2. g

$$(-1)^n B_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$(-1)^n B_{2n+1}(0) = (-1)^n B_{2n+1} = 0$$

d'après II. 2. b

$$(-1)^n B_{2n+2}(1) = (-1)^n B_{2n+2}(0) = 0$$

ou B_{2n} vérifie

$$(-1)^n B_{2n}(0) < 0$$

$$(-1)^n B_{2n}(1) < 0$$

$$(-1)^n B_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

et $(-1)^n B_{2n}$ strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

et strictement décroissante

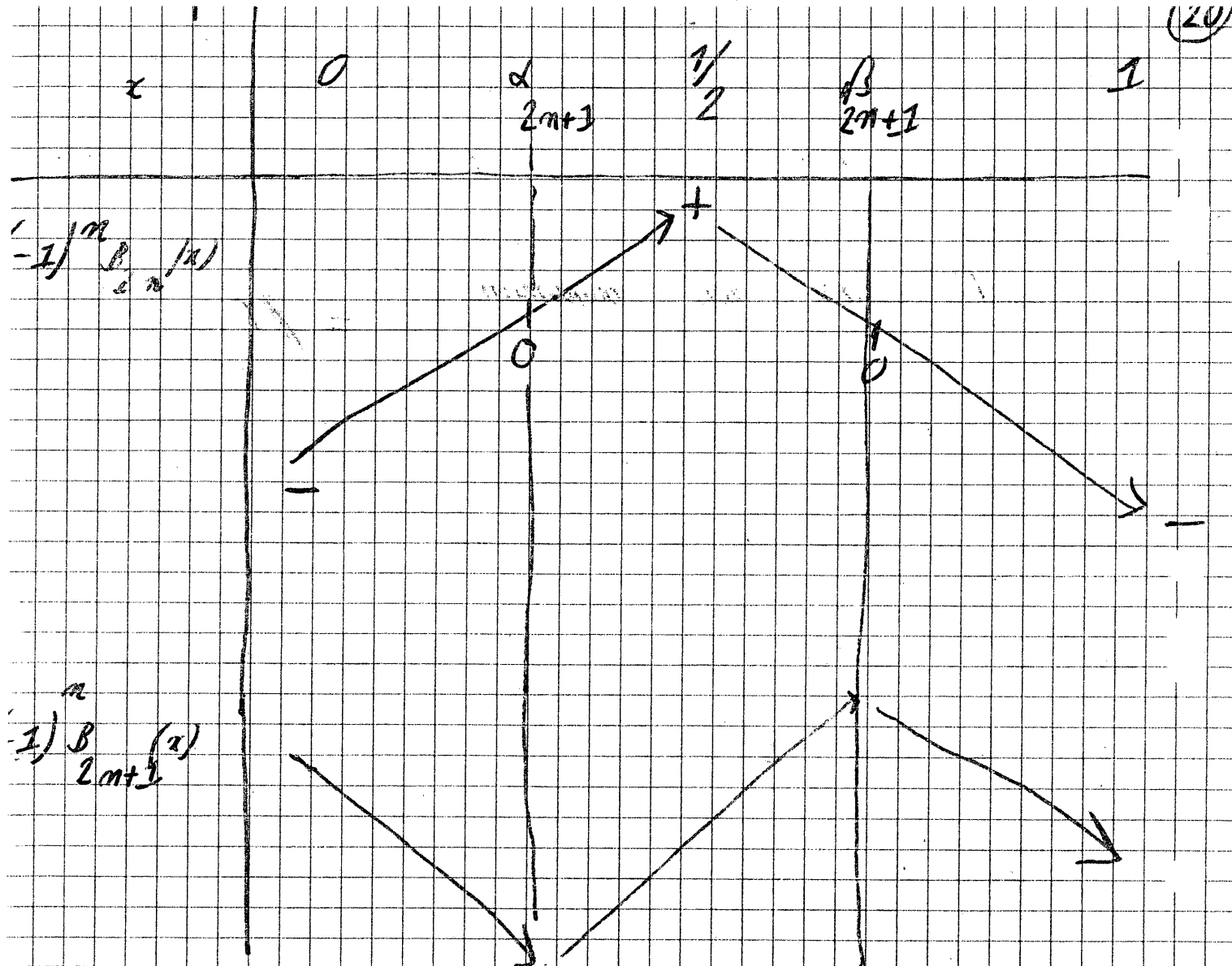


Tableau de variation de $(-1)^n B_{2m+1}(x)$

$$\left((-1)^n B_{2m+1}(x) \right)' = (-1)^n (2m+1) B_{2m}(x)$$

$$\exists \alpha_{2m+1} \in]0, \frac{1}{2}[\quad t_q \quad (-1)^n B_{2m}(\alpha_{2m+1}) = 0$$

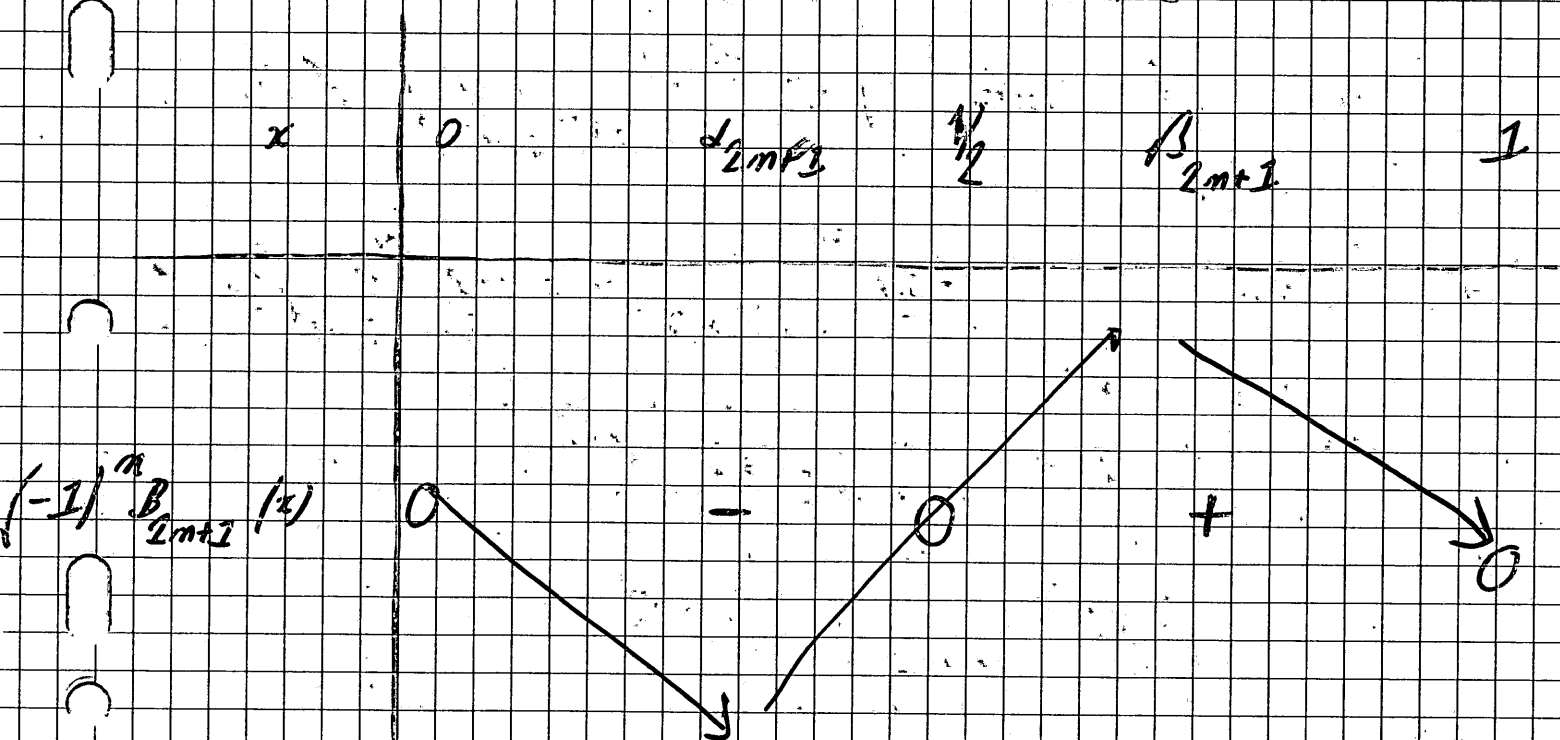
$$\exists \beta_{2m+1} \in]\frac{1}{2}, 1[\quad t_q \quad (-1)^n B_{2m}(\beta_{2m+1}) = 0$$

on a donc démontré que

$(-1)^n B_{2n+1}$ est strictement décroissante sur $[0, \alpha_{2n+1}]$
puis strictement croissante sur $[\alpha_{2n+1}, \beta_{2n+1}]$
puis strictement croissante sur $[\beta_{2n+1}, 1]$

Supposons le

tableau de variation de $(-1)^n B_{2n+1}(x)$



d'où

$$(-1)^n B_{2n+2}(0)$$

$$(-1)^n B_{2n+2}(0) = (-1)^n B_{2n+2}(1)$$

$$(-1)^n B_{2n+2}(x)$$

$$(-1)^n B_{2n+2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

ou d'après II.2.f $B_{2m}(x) = B_{2m}(1-x)$

(21)

Si $(-1)^m B_{2m+2}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

alors $\int_0^1 (-1)^m B_{2m+2}(x) dx > 0$ d'après II.3.a
cf page 8 bis

or par définition des B_{2m+2} cette intégrale est

également nulle donc $(-1)^m B_{2m+2}\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

De même Si $(-1)^m B_{2m+2}(0) = (-1)^m B_{2m+2}(1) < 0$

alors $\int_0^1 (-1)^m B_{2m+2}(x) dx < 0$

donc $(-1)^m B_{2m+2}(0) > 0$

Pour amorcer la récurrence il faut vérifier que

$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ vérifie

$(-1)^1 B_2(0) = -\frac{1}{6} < 0$

$(-1)^1 B_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) > 0$

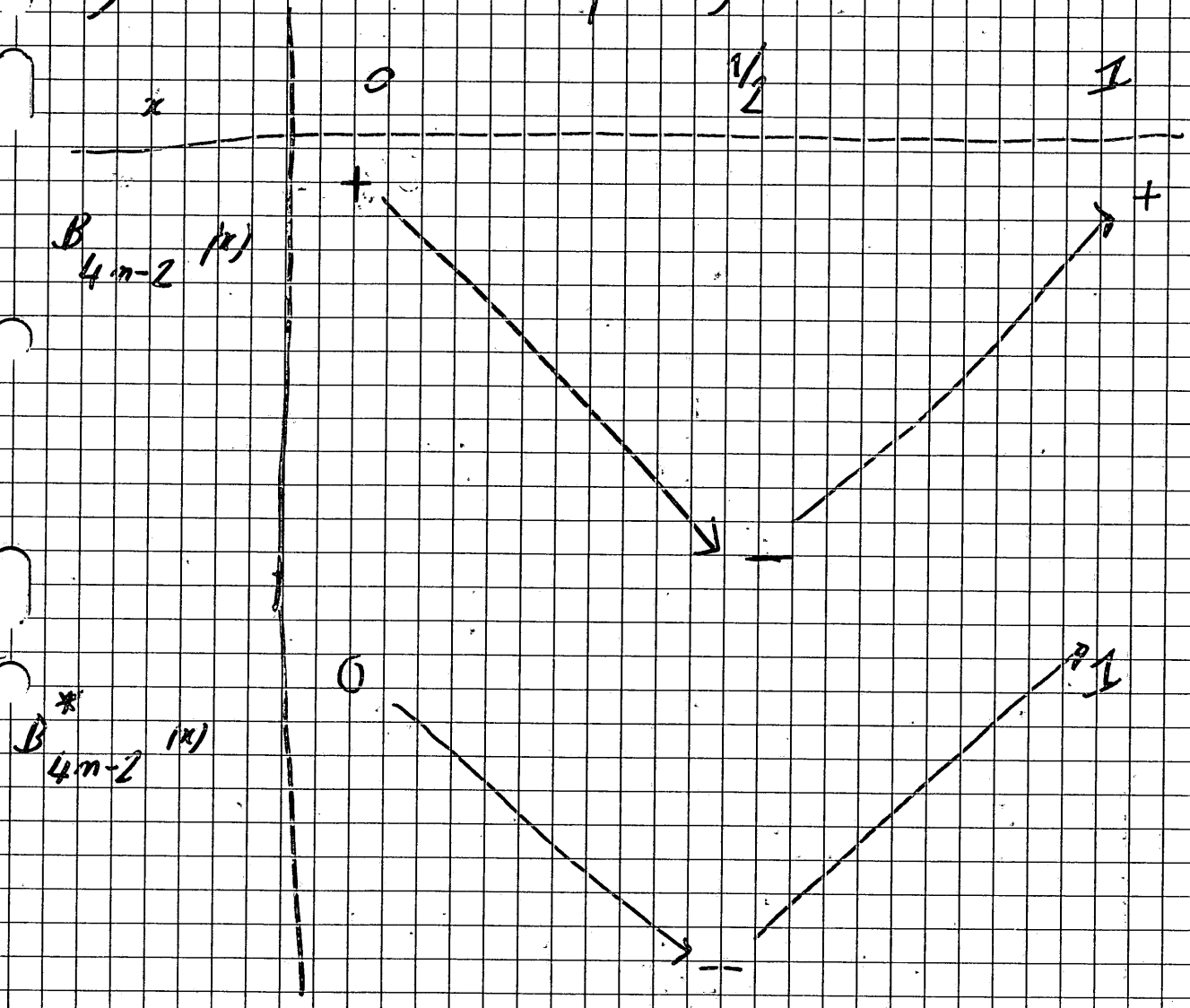
$B_2(x)$ est strictement décroissant sur $]-\infty, +\frac{1}{2}]$
croissant sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ 73h40

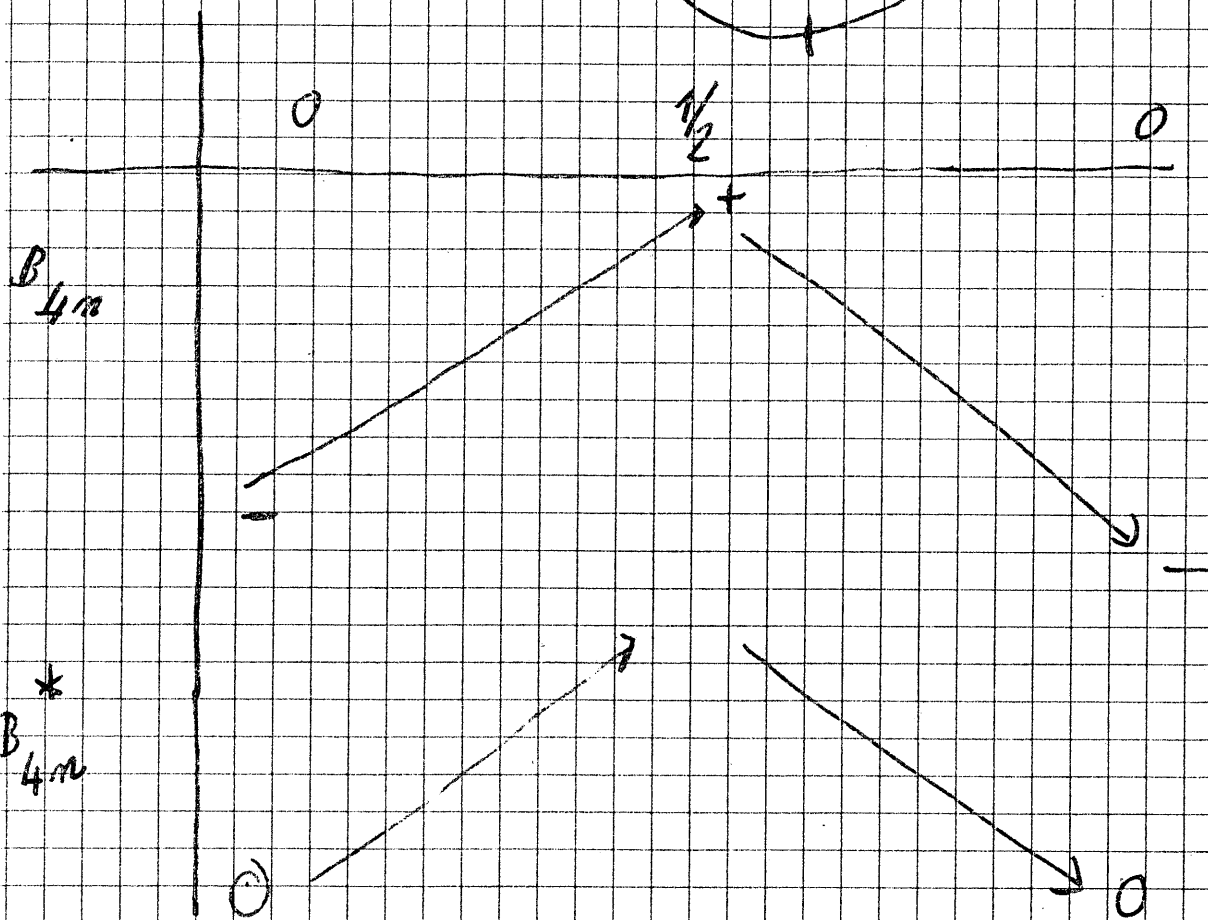
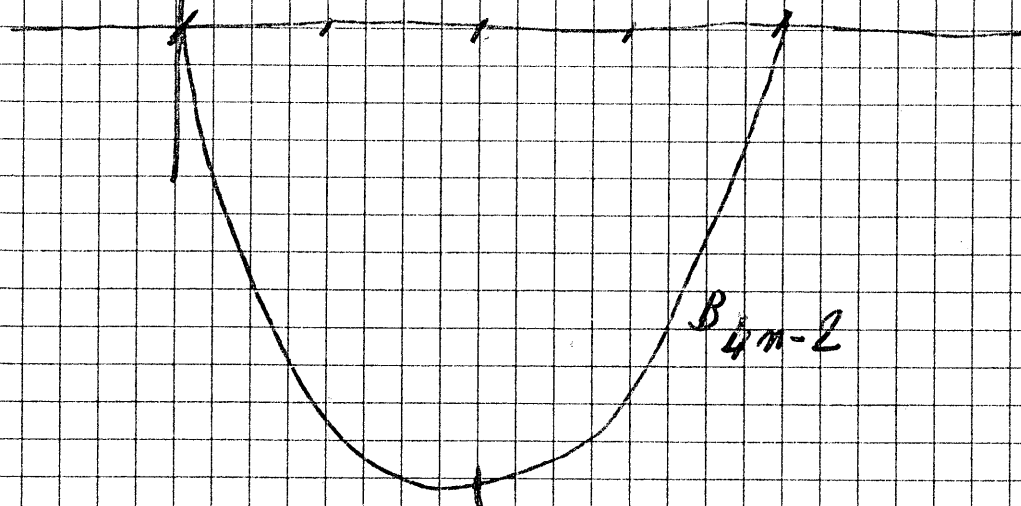
c/ $B_{2p} = B_{2p}(0)$

$\forall p \geq 1 \quad (-1)^p B_{2p}(0) < 0$ d'après b/

donc le signe de B_{2p} est $(-1)^{p+1}$ pour $p \geq 1$

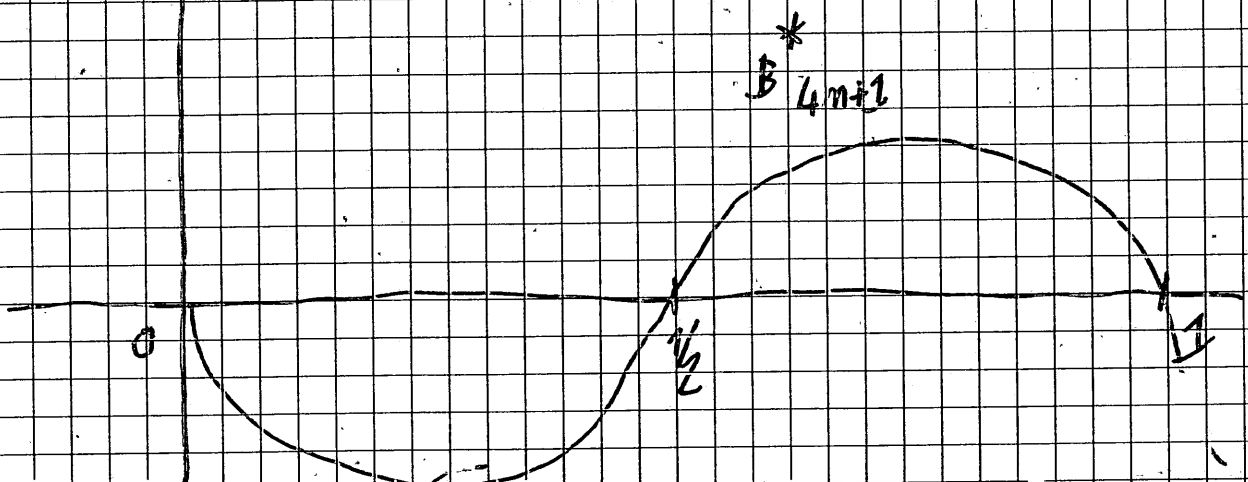
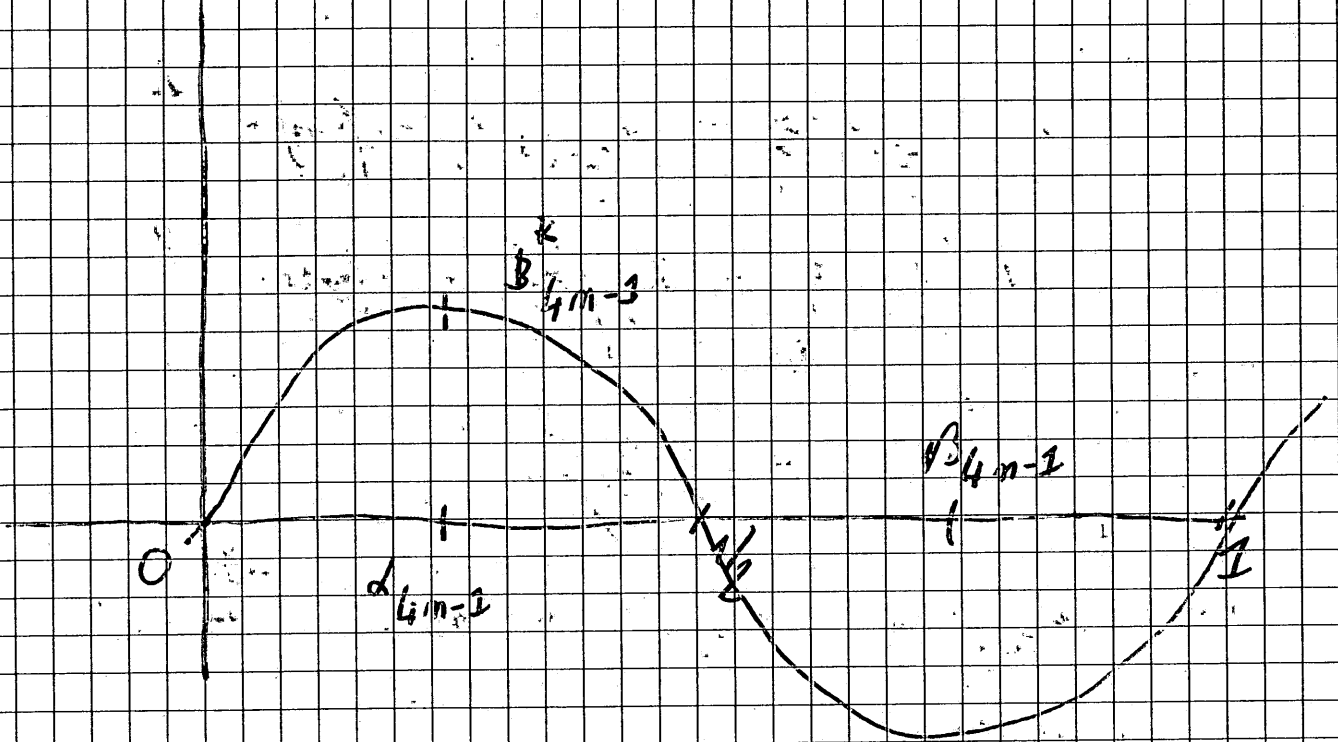
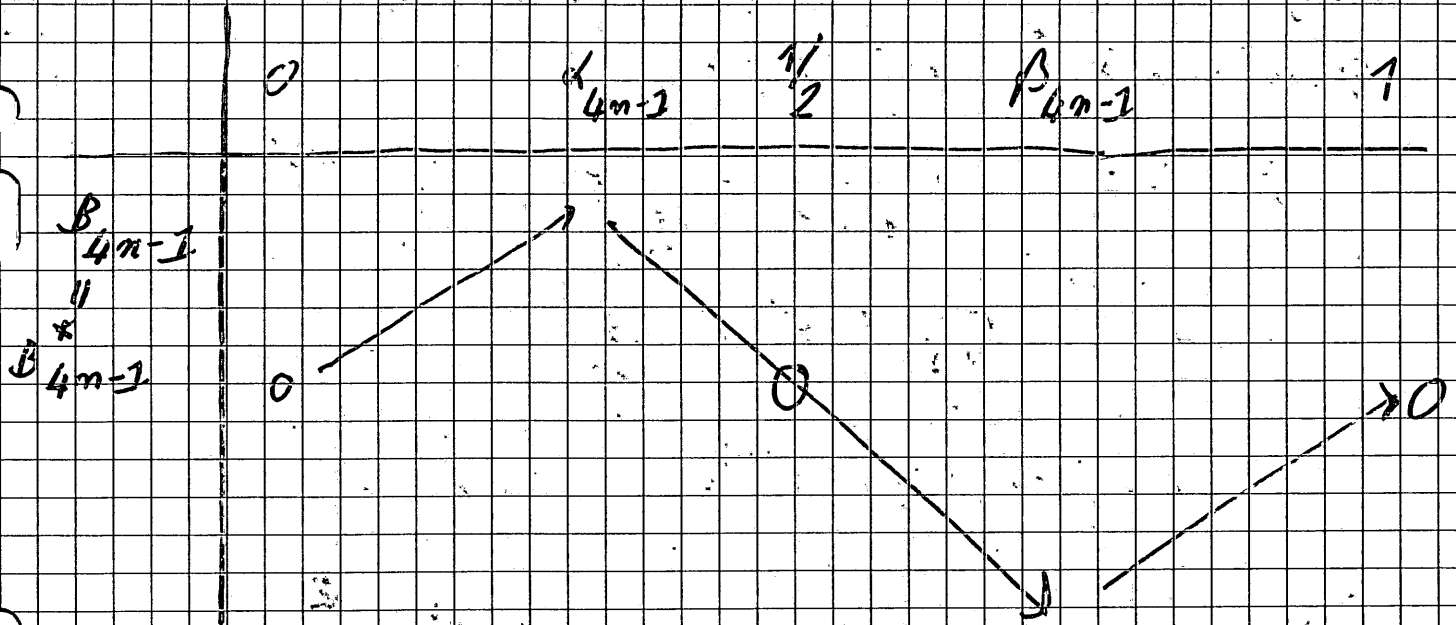
d/ $4m-2 = 2(2m-1)$





$$4n-1 = 2(2n-1) + 1$$

(25)



II. 4.

(26)

a) Démonstration par récurrence

$$\forall n \geq 1, B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

cas $n=1$ $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$

$$B_1(x+1) - B_1(x) = 1 = 1 \times x^0$$

Supposons $B_{n-1}(x+1) - B_{n-1}(x) = (n-1)x^{n-2}, n \geq 1$

$$n B_{n-1}(x+1) - n B_{n-1}(x) = n(n-1)x^{n-2}$$

$$B_n'(x+1) - B_n'(x) = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\left(B_n(x+1) - B_n(x) \right)'$$

donc $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} + C$

constante C

d'après II.2.6 $B_n(0+1) - B_n(0) = 0 = 0 + C$

donc $C = 0$

14h

b)

$$B_{p+1}(N+1) - B_{p+1}$$

$$= B_{p+1}(N+1) - B_{p+1}(0)$$

$$S_p(N) = \sum_{k=0}^N \frac{(k+1)k^{p+1-1}}{(p+1)} = \sum_{k=0}^N \frac{B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)}{p+1}$$

d'après a)

$$= \frac{1}{p+1} (B_{p+1}(N+1) - B_{p+1}(0))$$

$$c) S_1(N) = \frac{B_2(N+1) - B_2}{2}$$

$$= \frac{(N+1)^2 - (N+1)}{2} = \frac{(N+1)(N+1-1)}{2}$$

$$S_2(N) = \frac{B_3(N+1) - B_3}{3}$$

$$= \frac{(N+1)^3 - \frac{3(N+1)^2}{2} + \frac{N+1}{2}}{3}$$

$$= \frac{(N+1)}{3} \left[(N+1)^2 - \frac{3(N+1)}{2} + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{N+1}{3} \left(N^2 + 2N - \frac{3}{2}N - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{N+1}{3} \left(N^2 + \frac{N}{2} \right) = \frac{N+1}{6} N (2N+1)$$

$$S_3(N) = \frac{B_4(N+1) - B_4}{4}$$

(28)

$$= \frac{(N+1)^4 - 2(N+1)^3 + (N+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(N+1)^2}{4} \left((N+1)^2 - 2(N+1) + 1 \right)$$

$$= \frac{(N+1)^2}{4} \left(N^2 + 2N + 1 - 2N - 2 + 1 \right)$$

$$= \frac{N^2(N+1)^2}{4}$$

Ramiro Tome 1 p 87

Rappel méthode classique pour calculer $S_p(N)$

(29)

Ramus tome 1. p. 87

$$(k+1)^{p+1} = \sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i} k^i$$

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \sum_{i=0}^p \binom{p+1}{i} k^i$$

pour tout $k \geq 0$

d'où

$$\sum_{k=0}^N \left((k+1)^{p+1} - k^{p+1} \right) = \sum_{i=0}^p \binom{p+1}{i} \left(\sum_{k=0}^N k^i \right)$$

$$(N+1)^{p+1} - 0^{p+1} = \sum_{i=0}^p \binom{p+1}{i} S_i(N)$$

formule permettant de calculer $S_p(N)$
à partir de $S_{p-1}(N)$, $S_0(N)$

II. 5

(30)

a)

$$\frac{b_{2p+1} t^{2p+1}}{(2p+1)!} = 0$$

$$\frac{b_n}{n!} t^n \sim \frac{b_n e^n t^n}{n^n \sqrt{2\pi n}}$$

donc

$$\frac{|b_{2p}| |t|^{2p}}{(2p)!} \sim \frac{(1)^{2p}}{\pi} \left(\frac{1}{\pi} \right)^{2p} \frac{e^{2p} |t|^{2p} \sqrt{16\pi p}}{(2)^{2p} \sqrt{4\pi p}}$$

$$= \frac{|t|^{2p} \times 2}{\pi^{2p} 2^{2p}} = \left(\frac{|t|}{2\pi} \right)^{2p} \times 2$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow 0 \\ +\infty \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{si } |t| < 2\pi \\ \text{si } |t| > 2\pi \end{array}$$

donc si $|t| < 2\pi$ $\frac{b_n t^n}{n!}$ est une suite bornée

si $|t| > 2\pi$ elle n'est pas bornée

donc son rayon de convergence est égal à 2π

B) Soit $u_n = \frac{t^n}{n!} \quad n \geq 1$

$$v_n = \frac{b_n}{n!} t^n$$

alors $w_n = \sum_{k=1}^n u_k v_{n-k}$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k!} b_{n-k} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n!} \binom{n}{k} b_{n-k} t^n$$

$$= \frac{t^n}{n!} (b_n(1) - b_n) \text{ d'après II.2.c}$$

$$= \begin{cases} \frac{t^n}{n!} \times 0 & \text{si } n \geq 2 \text{ d'après II.2.b} \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ t (b_1(1) - b_1) = t (1 + b'_1 - b_1) & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

donc pour $|t| < 2\pi$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{b_m}{m!} t^m = \sum_{m=0}^{+\infty} w_m = t$$

d'ou

$$(e^t - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n t^n}{n!} = t \text{ pour tout } t \in]-2\pi, 2\pi[$$

donc $\forall t \in]-2\pi, 2\pi[$ puisque de 0

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} t^n$$

c/

$$e^{xt} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k t^k}{k!}$$

u_k

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{b_n}{n!} t^n}_{v_n}$$

calculons le produit au sens de Cauchy de ces 2 series entieres

$$w_m = \sum_{k=0}^m u_k v_{m-k} = \sum_{k=0}^m \frac{x^k t^k}{k!} \frac{b_{m-k}}{(m-k)!} t^{m-k}$$

$$= \sum_{k=0}^m \frac{x^k t^m b_{m-k}}{m!} \binom{m}{k}$$

$$= t^m B_m(x) \text{ d'apres II.2.c}$$

d'ou $\forall x \in \mathbb{R} \forall t \in]-2\pi, 2\pi[\setminus \{0\}$

$$\frac{t e^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n(x)}{n!} t^n$$

d) ou c) on a démontré que

$\forall t \in]-2\pi, 2\pi[$

la série $\sum \frac{b_n(x)}{n!} t^n$ converge absolument

donc son rayon de convergence R est supérieur ou égal

à 2π

Le calcul au b) marche dans le cas complexe

d'ou $\forall z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < 2\pi$

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = z$$

donc $\forall z \neq 0$ avec $|z| < 2\pi$

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Le calcul au c) marche dans le cas complexe

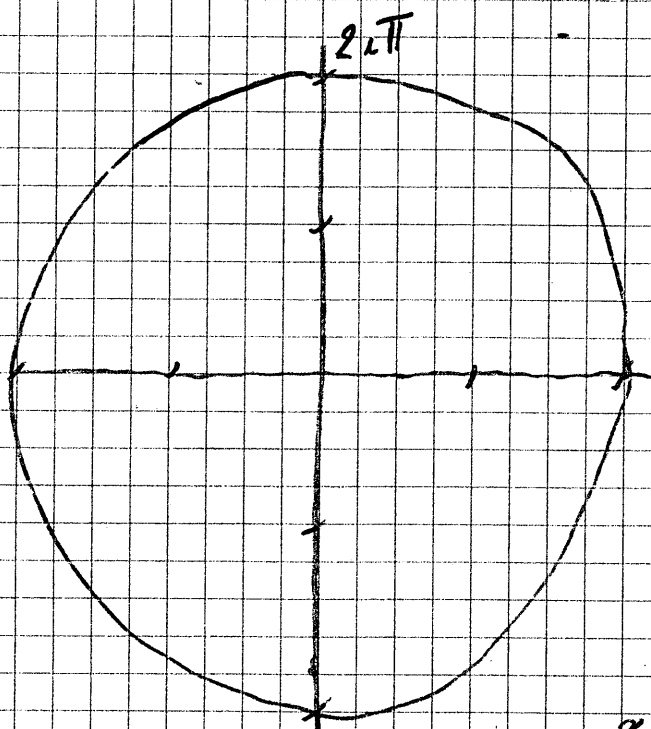
donc $\forall z \text{ tq } 0 < |z| < 2\pi, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{z e^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n(x)}{n!} z^n$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(k) z^n}{n!}$ est continue sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R .

Supposons que $R > 2\pi$

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(k) z^n}{n!}$ admet une limite $l \in \mathbb{C}$ quand $z \rightarrow 2i\pi$



$$\forall 0 < |z| < 2\pi \quad z e^{xz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(k) z^n}{n!} (e^z - 1)$$

en faisant tendre $z \rightarrow 2i\pi$ on obtient

$$2i\pi e^{x 2i\pi} = l \times (e^{2i\pi} - 1) = 0$$

d'où une contradiction

donc $R = 2\pi$.

III 1 a) $\forall x \in [k, k+1]$

$$\frac{1}{(k+1)^s} < \frac{1}{x^s} < \frac{1}{k^s}$$

d'où en intégrant (comme les fonctions sont continues)

$$\frac{1}{(k+1)^s} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} < \frac{1}{k^s}$$

$$\text{d'où} \quad \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s}$$

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^s}$$

donc si $\sum \frac{1}{k^s} \quad s > 1$ converge,

la suite associée $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^s}$ converge aussi

donc la fonction $F(x) = \int_1^x \frac{dx}{x^s}$ croissante sur $[1, +\infty[$

admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$.

c à d $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$ converge

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{b^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{b^{k+1}} \quad \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{dx}{x^{k+1}} \right)$$

$$= 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^s}$$

Si $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$ converge, la suite $1 + \int_1^n \frac{dx}{x^s}$

converge. Donc par comparaison,

la suite $\sum_{k=1}^n \frac{1}{b^k}$ converge

c à d la suite $\sum_{k=1}^n \frac{1}{b^k}$, $b > 1$ converge

b) $\int_1^x \frac{dx}{x^s} = \left[\frac{x^{1-s}}{1-s} \right]_1^x = \frac{1}{1-s} (x^{1-s} - 1)$

quand $x \rightarrow +\infty$ $\frac{1}{1-s} (0 - 1)$ si $1-s < 0$
 $+\infty$ si $1-s > 0$

cas $s = 1$

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^x = \ln x \xrightarrow{\text{quand } x \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$ converge en $s > 1$

d'après a) $\sum \frac{1}{n^s}$, $s > 1$ converge

en $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$ converge

donc $\zeta(s)$ est défini en $s > 1$

en $s \in]1, +\infty[$

si $s_1 > s_2$

$\forall n \geq 1$ $\frac{1}{n^{s_1}} \leq \frac{1}{n^{s_2}}$

$\frac{1}{n^{s_1}} \leq \frac{1}{n^{s_2}}$

d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{s_1}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{s_2}}$

c.a.d. $\zeta(s_1) \leq \zeta(s_2)$

donc ζ est décroissante en $]1, +\infty[$

si $s_1 > s_2$, $\zeta(s_2) - \zeta(s_1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^{s_2}} - \frac{1}{n^{s_1}} \right)$

$= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^{s_2}} - \frac{1}{n^{s_1}} \right)$ est une somme

à terme strictement positif donc est strictement positif

donc $\xi(p_1) < \xi(p_2)$

(38)

ξ est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$

c)

on remarque au 8) que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}$

$$\text{Soit } x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} - \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^s}$$

$\forall n \geq 1$

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s} > 0$$

donc la suite x_n est croissante

$$x_n - x_{n-1} \leq \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \quad \text{donc}$$

$$x_{n-1} - x_{n-2} \leq \frac{1}{(n-1)^s} - \frac{1}{n^s} \quad x_n - x_0 \leq 1 - \frac{1}{(n+1)^s}$$

$$x_2 - x_1 \leq \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s}$$

$$x_1 - x_0 \leq \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s}$$

cas particulier de
la démonstration
de Riemann tome 4

p. 32

donc la suite x_n est majorée par 1.

(19)

donc convergente

on relie donc que

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$ est convergente en $\sum \frac{1}{n^s}$ est convergente

Ramais tome 1, 2^e théorème p. 32

au a) on a m que x_n est inférieure ou égale

à 0

donc $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} - \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^s} \leq 1$$

en faisant tendre $n \rightarrow +\infty$ on obtient

$$0 \leq \zeta(s) - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} \leq 1$$

$$\text{c.à.d. } 0 \leq \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \leq 1$$

$$\text{donc } \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + M(s)$$

ou M est une fonction bornée

$$= \frac{1}{s-1} \left(1 + M(s)(s-1) \right)$$

$$\text{Lors } s \rightarrow 1^+ \quad 1 + M(s)(s-1) = 0 \quad \text{donc } \zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$$

donc $\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s) = \lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{1}{s-1} = +\infty$ (40)

d) $\forall s \in [a, +\infty[\quad \frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{n^a}$

ou $\sum \frac{1}{n^a}$ converge

donc la série $\sum \frac{1}{n^s}$ converge normalement

donc uniformément sur $[a, +\infty[$

$f_n(s) = \frac{1}{n^s} = e^{-s \ln n}$ est continue sur $\mathbb{R}$

donc $\zeta(s)$ est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$

c a d $\zeta(s)$ est continue sur $]1, +\infty[$

$\forall n \geq 2 \quad f_n(s) \xrightarrow{\text{quand } s \rightarrow +\infty} 0$

$n = 1 \quad f_1(s) = 1$

Lelong-Fernand-Armaudis VIII. 3. 4

donc d'après le théorème d'intermédiaire des limites

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{s \rightarrow +\infty} f_n(s)$$

c a d

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 1.$$

e) $\forall s \in \mathbb{R}$ $b_n(s) = \frac{1}{n^s}$ est une suite décroissante tendant vers 0

donc d'après le critère des séries alternées

$$\sum (-1)^{n+1} b_n(s) \text{ converge.}$$

$$f(s) - 0(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^s} \quad \text{les termes impairs sont nuls}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n)^s} = \frac{1}{2^{s-1}} f(s).$$

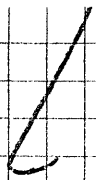
2. a) $\forall h \neq 0$

$$c_h(B_n) = \int_0^1 B_n(x) e^{-2i h \bar{h} x} dx$$

$$= \left[\frac{B_n(x) e^{-2i h \bar{h} x}}{-2i h \bar{h}} \right]_0^1 + \frac{1}{2i h \bar{h}} \int_0^1 B_n'(x) e^{-2i h \bar{h} x} dx$$

$$= \frac{1}{2i h \bar{h}} (B_n(0) - B_n(1)) + \frac{1}{2i h \bar{h}} \int_0^1 n B_{n-1}(x) e^{-2i h \bar{h} x} dx$$

$$= 0 + \frac{n}{2i h \bar{h}} c_h(B_{n-1}) \quad \text{d'après II. 2. b si } n \geq 2$$
$$\frac{1}{2i h \bar{h}} (B_1 - 1 - B_1) + \frac{1}{2i h \bar{h}} c_h(B_0) \quad \text{d'après II. 1. c si } n=1$$



0

or

$$n = 0$$

(42)

$$\forall b \neq 0$$

$$c_b(b_0) = 1$$

$$c_b(b_1) = \frac{-1}{2ib\pi}$$

$$c_b(b_m) = \frac{m}{2ib\pi} c_b(b_{m-1})$$

$$c_b(b_{m-1}) = \frac{m-1}{2ib\pi} c_b(b_{m-2})$$

$$c_b(b_2) = \frac{2}{2ib\pi} c_b(b_1)$$

$$c_b(b_1) = \frac{-1}{2ib\pi}$$

$$\forall b \neq 0 \quad c_b(b_m) = \frac{-m!}{(2ib\pi)^m} \quad \text{if } m \geq 1$$

$$= 0 \quad \text{if } m = 0$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, c_0(b_m) = \int_0^1 b_m(x) dx = 0$$

$$c_0(b_0) = 1$$

b) d'après l'égalité de Parseval

(43)

$$\int_0^1 B_m(x) \overline{B_m(x)} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{c_k(B_m)} c_k(B_m)$$

$$= \overline{c_0(B_m)} c_0(B_m) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\overline{c_{-k}(B_m)} c_{-k}(B_m) + \overline{c_k(B_m)} c_k(B_m) \right)$$

or d'après a)

$$c_0(B_m) = 0$$

$$c_{-k}(B_m) = \frac{-m!}{(2\pi(-k))^m} = \frac{-m!}{(2(-i)(-k)\pi)^m} = c_k(B_m)$$

donc

$$\overline{c_k(B_m)} c_{-k}(B_m) = \overline{c_k(B_m)} c_k(B_m)$$

De même

$$c_k(B_m) \overline{c_k(B_m)} = c_{-k}(B_m) \overline{c_{-k}(B_m)}$$

donc

$$\int_0^1 B_m(x) \overline{B_m(x)} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\overline{c_k(B_m)} c_{-k}(B_m) + c_{-k}(B_m) \overline{c_{-k}(B_m)} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{-m! \times -m!}{(2\pi k)^{n+m} (-1)^m} + \frac{-m! \times -m!}{(-1)^m (2\pi k)^{n+m}} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n! m!}{(2, \pi)^{n+m}} \left((-1)^m + (-1)^n \right)$$

(144)

$$= \frac{n! m!}{(2, \pi)^{n+m}} \left((-1)^m + (-1)^n \right) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{n+m}}$$

$$= \frac{n! m!}{(2, \pi)^{n+m}} \left((-1)^m + (-1)^n \right) \zeta(n+m)$$

c) En particulier $n=1$ $m=2p-1$

$$\int_0^1 B_1(x) B_{2p-1}(x) dx = \frac{(2p-1)!}{(2, \pi)^{2p}} (-1 + -1) \zeta(2p)$$

$$\int_0^1 B_1(x) B_{2p-1} dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) \frac{B'_{2p}(x)}{2p} dx$$

$$= \left[\left(x - \frac{1}{2} \right) \frac{B_{2p}(x)}{2p} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2p} B_{2p}(x) dx$$

$$= \frac{1}{2p} \left(\frac{1}{2} B_{2p}(1) + \frac{1}{2} B_{2p}(0) \right)$$

$$= \frac{1}{2p} B_{2p} \quad \text{d'après II. 2. b}$$

$$\text{denn } \frac{1}{2^\mu} B_{2\mu} = \frac{(2\mu-1)! \times (-2)}{(2\pi)^{2\mu} (-1)^\mu} S(2\mu)$$

$$\text{also } S(2\mu) = \frac{1}{(2\mu)!} B_{2\mu} \frac{1 \times (-1)^{\mu+1} \times (2\pi)^{2\mu}}{2}$$

man hat $\mu \geq 1$
d) also $\mu = 1$

$$S(2) = \frac{1}{2!} \times B_2 \times \frac{1}{2} \times (-1)^2 \times (2\pi)^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

also $\mu = 2$

$$\begin{aligned} S(4) &= \frac{1}{4!} B_4 \times \frac{1}{2} \times (-1) \times (2\pi)^4 \\ &= \frac{1}{4 \times 3 \times 2} \left(\frac{-1}{30} \right) \times \frac{1}{2} \times (-1) \times \cancel{2^4} \times \pi^4 \\ &= \frac{\pi^4}{90} \end{aligned}$$

also $\mu = 3$

$$\begin{aligned} S(6) &= \frac{1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} \times \frac{1}{42} \times \frac{1}{2} \times \cancel{(-1)^3} \times \cancel{2^6} \times \pi^6 \\ &= \frac{1}{\cancel{4} \times 3 \times 5 \times \cancel{4} \times 3 \times \cancel{2}} \times \frac{1}{\cancel{2} \times 3 \times 7} \times \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2^6} \times \pi^6 \\ &= \frac{\pi^6}{945} \end{aligned}$$

d'après II. 1. e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \theta(2) = \left(1 - \frac{1}{2^{2-1}}\right) \zeta(2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \theta(4) = \left(1 - \frac{1}{2^{4-1}}\right) \zeta(4)$$

$$= \frac{7}{8} \times \frac{\pi^4}{90} = \frac{7\pi^4}{720}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6} = \theta(6) = \left(1 - \frac{1}{2^{6-1}}\right) \zeta(6)$$

$$= \frac{31}{32} \times \frac{\pi^6}{945} = \frac{31\pi^6}{30240}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^s} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^s}$$

$$\text{donc } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} = \zeta(s) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)$$

$$\text{donc } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{4 \times 2 \times 6} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$= 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{15}{16} \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{16 \times 6} = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\begin{aligned}
 D = 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} &= \frac{63}{64} \frac{\pi^6}{945} \\
 &= \frac{\cancel{9} \times \cancel{7} \times \pi^6}{64 \times \cancel{3} \times 5 \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{7}} = \frac{\pi^6}{960}
 \end{aligned}$$

e) D'après III.2.c et III.1.d

$$\begin{aligned}
 \beta(2p) &= (-1)^{p+1} \frac{B_{2p}}{2} \frac{(2\pi)^{2p}}{(2p)!} \sim 1 \\
 &\text{quand } p \rightarrow +\infty
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } B_{2p} \sim (-1)^{p+1} \frac{2 \times (2p)!}{(2\pi)^{2p}}$$

$$\sim \frac{(-1)^{p+1} 2}{(2\pi)^{2p}} \left(\frac{2p}{e}\right)^{2p} \sqrt{2\pi 2p} \text{ d'après Stirling}$$

$$= (-1)^{p+1} \left(\frac{p}{e\pi}\right)^{2p} \sqrt{16\pi p}$$