

9h - 12h

Vendredi 25

Septembre 2015

①

Corrige' 2nd épreuve CAPES 2008

parties A, B.I et B.II

9h13 partie A
paragraphe I

$$1. a \quad I(1, a) = \int_0^1 (1-x)^{a-1} dx$$

$$I(1, a) = \left[-\frac{(1-x)^a}{a} \right]_0^1 = \frac{1}{a}$$

9h30

1. B

$$I(b+1, a) = \int_0^1 x^b (1-x)^{a-b-1} dx$$

Intégration par parties

$$B \quad I(b, a) = \int_0^1 b x^{b-1} (1-x)^{a-b} dx$$

$$= \left[x^b (1-x)^{a-b} \right]_0^1 - \int_0^1 x^b (a-b) x (-1) (1-x)^{a-b-1} dx$$

$$= (a-b) I(b+1, a)$$

9h36

1. c) Faisons a.

Démonstration par récurrence ^{fini} sur b ($1 \leq b \leq a$)

$$b=1 \quad I(1, a) = \frac{1}{a} \text{ d'après 1. a)}$$

$$= \frac{1}{1 \times \binom{a}{1}}$$

$$\text{Supposons que } I(b, a) = \frac{1}{b \binom{a}{b}} \text{ avec } b < a$$

d'après 1. b)

$$I(b+1, a) = \frac{b}{a-b} \frac{1}{b \binom{a}{b}}$$

$$\binom{a}{b+1} = \binom{a}{b} \frac{a-b}{b+1}$$

$$= \frac{(a-b) a!}{(a-b)! b!} = \frac{a!}{(a-b)! (b+1)!}$$

donc

$$I(b+1, a) = \frac{1}{(b+1) \binom{a}{b+1}}$$

9h47

(3)

$$2. a) \quad (1-x+xy)^{a-1} = \sum_{i=0}^{a-1} \binom{a-1}{i} (xy)^i (1-x)^{a-1-i}$$

Posons $k = i+1$

$$= \sum_{k=1}^a \binom{a-1}{k-1} x^{k-1} y^{k-1} (1-x)^{a-k}$$

donc

$$\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1} dx = \sum_{k=1}^a \binom{a-1}{k-1} y^{k-1} I(k, a)$$

9h56

$$2. b) \quad \int_0^1 (1-x+xy)^{a-1} dx = \int_0^1 [1+(y-1)x]^{a-1} dx$$

$$= \left[\frac{[1+(y-1)x]^a}{(y-1)a} \right]_0^1 = \frac{1}{(y-1)^a} (y^a - 1)$$

$$\frac{1}{a} \sum_{k=1}^a y^{k-1} = \frac{1}{a} \times 1 \times \frac{1-y^a}{1-y} \quad \text{donc c'est bon}$$

10h06

2. c) D'après 2 a et 2-b

(4)

$$\forall y \in [0, 1]$$

$$\sum_{k=1}^a \binom{a-1}{k-1} y^{k-1} I(k, a) = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^a y^{k-1}$$

égalité de 2 polynômes en y d'où

$\forall k$ compris entre 1 et a

$$\binom{a-1}{k-1} I(k, a) = \frac{1}{a}$$

donc $I(b, a) = \frac{1}{a \binom{a-1}{b-1}}$ en remplaçant k par b

$$\begin{aligned} \frac{b \binom{a}{b}}{\binom{a-b}{b}} &= b \cdot \frac{a}{(a-b)! b!} = a \frac{(a-1)!}{[(a-1)+(b-1)]! (b-1)!} \\ &= a \binom{a-1}{b-1} \end{aligned}$$

10h12
3. a)

$$\begin{aligned} I(b, a) &= \int_0^1 x^{b-1} \sum_{k=0}^{a-b} \binom{a-b}{k} (-x)^k dx \\ &= \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \int_0^1 x^{k+b-1} dx \end{aligned}$$

(5)

$$= \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \left[\frac{x^{b+b}}{k+b} \right]_0^1$$

$$= \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{1}{k+b}$$

10h18

3. b) Pour tout k entier compris entre 0 et $a-b$

$$b \leq k+b \leq a$$

donc $\frac{\Delta a}{k+b}$ est un entier

donc $\binom{a-b}{k}$ est aussi un entier

$$I(b, a) \Delta a \in \mathbb{N}$$

10h22

3. c)

d'après 1. c

$$I(b, a) \Delta a = \frac{\Delta a}{\binom{a}{b}} \in \mathbb{N} \text{ d'après 3. b}$$

donc $\binom{a}{b}$ divise l'entier Δa

10h26

4 a) d'après 3 c) $\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n} qui divise Δ_{2n+1}

4ème de paire $a-1$

$$\binom{2n+1}{a} \binom{2n}{b-1} = \binom{2n+1}{n+1} \binom{2n}{n} \text{ donc } \Delta_{2n+1}$$

10h36

4 b)

$$2n+1 - 2 \times n = 1 \text{ donc d'après Legendre}$$

n et $2n+1$ ont même ordre de

$$n \text{ donc } \frac{\Delta_{2n+1}}{\binom{2n}{n}}$$

donc d'après le Théorème de Gauss

$$2n+1$$

$$n \binom{2n+1}{n} \text{ donc } \frac{\Delta_{2n+1}}{\binom{2n}{n}}$$

$$\text{c a d } n \binom{2n+1}{n} \text{ donc } \Delta_{2n+1}$$

10h43

4 c) on peut supposer $k \leq n$ car

$$\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k}$$

$$\binom{2n}{k} = \frac{2n \times 2n-1 \times \dots \times 2n-k+1}{1 \times 2 \times \dots \times k} \text{ et inférieure à } n!$$

$$a) \binom{2n}{n} = \frac{2n \times 2n-1 \times \dots \times 2n-k+1 \times \dots \times n+1}{1 \times 2 \times \dots \times k \times \dots \times n}$$

car pour tout $j \leq n$

$$\frac{2n-j+1}{j} \geq \frac{n+1}{n} \geq 1$$

j en est au moins

$$4 d) \quad 4^n = \left(2^2\right)^n = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \quad (7)$$

d'après 4 c)

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = (2n+1) \binom{2n}{n}$$

4 e) d'après 4 b)

17h16

$$\Delta_{2n+1} = n \binom{2n+1}{n} \times q$$

d'après 4 d)

17h21

$$\geq n 4^n q \geq n 4^n \quad \text{car } q \in \mathbb{N}^*$$

b)

$n=7$

$$\Delta_7 = \text{ppcm}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

$$= 7 \times 3 \times 4 \times 5 = 420 > 2^7 = 128$$

$n=8$

$$\Delta_8 = \text{ppcm}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$$

$$= 7 \times 3 \times 8 \times 5 = 840 > 2^8 = 256$$

cas n impair et $n \geq 5$

$n = 2p+1$

$$\Delta_n = \Delta_{2p+1} \geq p 4^p \geq 2 \times 2^{2p} = 2^n$$

car $p \geq 2$

cas n pair

$n = 2p+2$

$$\Delta_n \geq \Delta_{n-1} = \Delta_{2p+1} \geq p 4^p \geq 4 \times 2^{2p} = 2^n$$

car $p \geq 4$ ou que $n \geq 10$

17h37

5 a)

(3)

$$v_p(\Delta_n) = \max(v_p(1), \dots, v_p(n))$$

donc $v_p(\Delta_n) = v_p(1)$ par un i compris entre 1 et n

$$v_p(\Delta_n) = v_p(1) \leq 1 \leq n$$

11h48

8)

Par tout entier n, $n = \prod_{p \leq n} p^{v_p(n)}$

donc pour l'entier Δ_n

$$\Delta_n = \prod_{p \leq \Delta_n} p^{v_p(\Delta_n)}$$

Comme $v_p(\Delta_n) = 0$ si $p > n$

on a $\Delta_n = \prod_{p \leq n} p^{v_p(\Delta_n)}$

11h54

c)

$$\Delta_n = \prod_{p \leq n} p^{v_p(\Delta_n)} \leq \prod_{p \leq n} n = n^{\pi(n)}$$

d'après 5 a)

11h55

6 a) Si $n \geq 7$ ou $n = 5$

$$n \pi(n) \geq \Delta_n \geq 2^n$$

$$e \pi(n) \ln n \geq e^{n \ln 2} \text{ donc } \pi(n) \geq \frac{n \ln 2}{\ln n}$$

b)

$$n = 2$$

$$\pi(2) = 1$$

$$2^1 \geq 2^2 \quad \text{FAUX}$$

$$n = 3$$

$$\pi(3) = 2$$

$$3^2 \geq 2^3 \quad \text{VRAI}$$

$$n = 4$$

$$4^2 \geq 2^4 \quad \text{VRAI}$$

$$n = 5$$

$$\pi(5) = 3$$

$$125 = 5^3 \geq 2^5 = 32 \quad \text{VRAI}$$

$$n = 6$$

$$\pi(6) = 3$$

$$6 \times 36 = 6^3 \geq 2^6 = 64 \quad \text{VRAI}$$

12h05

paragraphe II

dur !

(10)

1. a) D'après le Théorème de Gauss

Si a divise c et b divise c et a, b premiers entre eux
alors ab divise c

Comme deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux,
il suffit de montrer que p divise $\binom{b}{a}$

car p nombre premier tq $a < p < b$

$$\binom{b}{a} = \frac{b(b-1)\dots(b-a+1)}{a!}$$

Comme $a \geq \frac{b}{2}$ $(a) \leq b$ on a $b-a+1 \geq \frac{b}{2}$

donc Si $a < p < b$ alors $b-a+1 < a+1 < p < b$

donc p est un des facteurs de $b(b-1)\dots(b-a+1)$

comme $a!$ ne contient pas le facteur p car $a < p$

donc p reste dans la décomposition en facteurs

premiers du quotient $\binom{b}{a}$ donc p

divise $\binom{b}{a}$

cas particulier bien connu $b = p$

$$p \mid \binom{p}{a} \text{ car } 0 < a < p$$

16h15

(11)

b) prout $a = m+1$ $b = 2m+1$ donc 1. a)

$$c) \binom{2m+1}{m+1} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} = \binom{2m+1}{m}$$

$$d) (1+1)^{2m+1} = 4^m \times 2$$

$$= \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} \geq \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} = 2 \binom{2m+1}{m}$$

$$\text{donc } \binom{2m+1}{m} \leq 4^m$$

$$e) \prod_{m+1 \leq p \leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m+1} \leq 4^m$$

d'après b) d'après d) et c)

16h30

f) Soient p premiers P_m

$$P_1 \quad k=1 \quad 1 \leq 4^1$$

$$k=2 \quad 2 \leq 4^2$$

Supposons P_m vraie. Montrons P_{m+1}

Soit $k \in \{1, \dots, 2m, 2m+1, 2m+2\}$

si $k \leq 2m$ c'est bon

car $k = 2m+1$ ou $k = 2m+2$, comme $2m+2$ n'est pas

$$\text{premier, } \prod_{k \leq k} p = \prod_{p \leq 2m+1} p = \prod_{p \leq m+1} p \times \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p$$

$\leq 4^{n+1} \times 4^m$ par hypothèse de récurrence

comme $n+2 \leq 2m$ et d'après c)

$$= 4^{2n+1} \leq 4^k$$

16h45

2. a) $e^x = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!} > \frac{x^m}{m!}$

on prend $x = m \quad e^m > \frac{m^m}{m!}$

d'où $m! > \frac{m^m}{e^m}$

16h55

b) Soit $\{p_1, p_2, \dots, p_{\pi(n)}\}$ les nombres premiers inférieurs à n
 $\pi(n)! = \prod_{i=1}^{\pi(n)} p_i \leq \prod_{i=1}^{\pi(n)} p_i = \prod_{p \leq n} p \leq 4^n$
 d'après A.I.1.f

$$\left(\frac{\pi(n)}{e}\right)^{\pi(n)} \leq \pi(n)! \leq 4^n$$

d'où $\pi(n) (\ln \pi(n) - \ln e) \leq n \ln 4$
 $\pi(n) \ln \pi(n) - \pi(n) \leq n \ln 4$

17h06

3. $(x \ln x - x)' = \ln x > 0$ si $x \geq 1$

donc $x \ln x - x$ strictement croissante sur $[1, +\infty[$

Soit $n_0 \geq 3$ tel que $\pi(n_0) > e \frac{n_0}{\ln n_0}$

$$\pi(n_0) > e \frac{n_0}{\ln n_0}$$

donc

$$n_0 \ln 4 > \pi(n_0) \ln \pi(n_0) - \pi(n_0) > e \frac{n_0}{\ln n_0} \ln e \frac{n_0}{\ln n_0} - e \frac{n_0}{\ln n_0}$$

donc

$$\begin{aligned} \ln 4 &> \frac{e}{\ln n_0} \ln \frac{e n_0}{\ln n_0} - \frac{e}{\ln n_0} \\ &= \frac{e}{\ln n_0} (1 + \ln n_0 - \ln \ln n_0) - \frac{e}{\ln n_0} \\ &= \cancel{\frac{e}{\ln n_0}} + e - \frac{e \ln \ln n_0}{\ln n_0} - \cancel{\frac{e}{\ln n_0}} \end{aligned}$$

donc

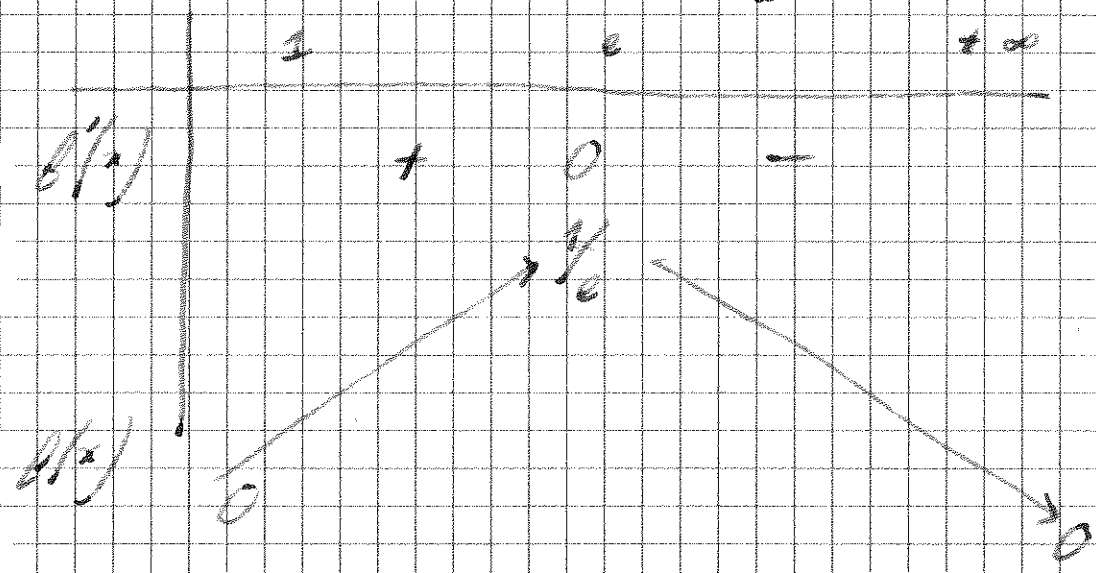
$$\frac{e \ln \ln n_0}{\ln n_0} > e - \ln 4$$

g)

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \geq 0 \text{ pour tout } x \geq 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$



donc $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$ sur $[1, +\infty[$

18h

donc on prend $x = \ln n_0$

$$\frac{e - \ln 4}{e} \leq \frac{\ln \ln n_0}{\ln n_0} \leq \frac{1}{e}$$

donc $e \leq \ln 4 + 1$
 $2.71 \quad 1.38$

Contradiction

donc $\forall n_0 \geq 3 \quad f(n_0) \leq e \frac{n_0}{\ln n_0}$

18h10