

# INTRODUCTION

L'objet du problème est l'étude de la suite  $(s_n)_{n \geq 1}$  définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Dans une première partie, nous nous attacherons à démontrer, de différentes façons, par des méthodes élémentaires, que cette suite converge. Les parties 2, 3 et 4 suivantes seront consacrées à la détermination de sa limite  $S$  par divers moyens. Les parties 5 et 6 utiliseront la valeur de  $S$  pour calculer la somme de certaines séries numériques.

On rappelle que, pour tous entiers  $m, n$  vérifiant  $m \leq n$ , on note  $[m, n]$  l'intervalle d'entiers

$$[m, n] = \{p \in \mathbb{Z} \mid m \leq p \leq n\}$$

## PREMIÈRE PARTIE : Convergence de la suite

Dans cette partie, le candidat utilisera uniquement les connaissances faisant partie du programme de Terminale S.

### 1. Première méthode

a) Démontrer que, pour tout entier  $k \geq 2$ , on a la majoration

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

b) En déduire que la suite  $(s_n)_{n \geq 1}$  est majorée.

c) Démontrer que la suite  $(s_n)_{n \geq 1}$  converge et donner un majorant de sa limite.

Dans toute la suite du problème, on notera  $S$  cette limite.

### 2. Deuxième méthode

On considère la suite  $(t_n)_{n \geq 1}$ , définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad t_n = s_n + \frac{1}{n}$$

a) Démontrer que les suites  $(s_n)_{n \geq 1}$  et  $(t_n)_{n \geq 1}$  sont adjacentes.

b) Donner, en le justifiant, un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$  de  $S$ .

### 3. Troisième méthode

Ecrire le texte d'un exercice de niveau terminale S démontrant, par comparaison à une intégrale, la convergence de la suite  $(s_n)_{n \geq 1}$ .

## DEUXIÈME PARTIE : Utilisation de polynômes

1. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme de degré  $n \geq 1$  :  $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$ .  
Rappeler la formule permettant de calculer la somme  $\sigma_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  des racines de  $P$  en fonction de ses coefficients  $a_k$ ,  $k \in [0, n]$ .

2. a) Soient  $p \in \mathbb{N}$  et  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Démontrer l'égalité

$$\sin((2p+1)\varphi) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p-2k}(\varphi) \sin^{2k+1}(\varphi)$$

où  $\binom{2p+1}{2k+1}$  désigne le coefficient binomial pour  $k \in [0, p]$ .

b) En déduire que, pour tout entier  $p \in \mathbb{N}$  et pour tout réel  $\varphi \neq 0[\pi]$ , on a

$$\sin((2p+1)\varphi) = \sin^{2p+1}(\varphi) \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} (\cotan^2 \varphi)^{p-k}$$

$$\text{où } \cotan \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

3. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $P \in \mathbb{R}[X]$  le polynôme défini par :

$$P(X) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} X^{p-k}$$

a) Pour tout entier  $k \in [1, p]$ , on pose  $\gamma_k = \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$ . Calculer  $P(\gamma_k)$  pour tout  $k \in [1, p]$ .

b) Vérifier que, pour tout  $k \in [1, p]$ , le réel  $\frac{k\pi}{2p+1}$  appartient à l'intervalle  $]0, \frac{\pi}{2}[$ . En déduire que le polynôme  $P$  possède  $p$  racines distinctes, que l'on déterminera.

c) En déduire les égalités :

$$1 = 0,5 + 0,5 \quad \sum_{k=1}^p \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3} \quad \sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}$$

4. a) Démontrer, pour tout réel  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[$ , les encadrements

$$0 < \sin \varphi < \varphi < \tan \varphi$$

- b) En déduire que, pour tout entier  $p \geq 1$ , on a l'encadrement

$$\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} < \frac{1}{\sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2}} < \frac{2p(p+1)}{3}$$

- c) Démontrer que  $S = \frac{\pi^2}{6}$ .

5. Montrer que les suites  $(u_n)_{n \geq 1}$ ,  $(v_n)_{n \geq 1}$  et  $(w_n)_{n \geq 1}$  définies par :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2}, \quad v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad w_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

sont convergentes et déterminer les valeurs exactes de leurs limites, respectivement notées  $U$ ,  $V$  et  $W$ .

### TROISIÈME PARTIE : Utilisation des intégrales de Wallis

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \, dt, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \, dt \quad \text{et} \quad K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} I_n$$

1. Calculer les intégrales  $I_0$  et  $J_0$ .

2. a) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$

(Indication : on pourra penser à une intégration par parties.)

- b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$

3. Soit  $n \geq 1$ .

- a) Démontrer la relation  $I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$

- b) En déduire que  $K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}$

- c) Démontrer la relation  $\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = J_0 - K_n$

4. a) Démontrer que, pour tout réel  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , on a :  $x \leq \frac{\pi}{2} \sin x$

- b) En déduire que, pour tout entier  $n$ , on a

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)} \quad \text{puis} \quad 0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}$$

- c) Retrouver la valeur de  $S$ .

### QUATRIÈME PARTIE : Noyau de Dirichlet

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $D_n$  le noyau de DIRICHLET, défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx)$$

1. Démontrer que, pour tout entier  $n \geq 1$  et tout réel  $x \neq 0[2\pi]$ , on a

$$D_n(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin \frac{x}{2}}$$

2. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $L_n$  l'intégrale

$$L_n = \int_0^\pi x D_n(x) \, dx$$

- a) Calculer l'intégrale  $\int_0^\pi x \cos(kx) \, dx$  pour tout entier  $k \geq 1$ .

- b) En déduire que

$$L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k^2}$$

3. On note  $f$  le prolongement par continuité en 0 de la fonction définie sur l'intervalle  $[0, \pi]$  par :  $x \mapsto \frac{x}{\sin(\frac{x}{2})}$ .

Démontrer que la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $[0, \pi]$ .

4. Soit  $\phi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $[0, \pi]$ . Démontrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \phi(x) \sin(\lambda x) \, dx = 0$$

(Indication : on pourra penser à une intégration par parties.)

5. a) Démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 0$ .

- b) Retrouver la valeur de  $S$ . (On utilisera la relation entre  $W$  et  $S$  obtenue à la question 5 de la deuxième partie)

# Corrigé CAPES 2007

13/20

①

Première Partie

2,5/3

9h07

1 a)  $\forall k, k^2 \geq k(k-1) > 0$

d'où  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{k - (k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

b) 
$$s_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} \leq 2$$

c)  $s_n - s_{n-1} = \frac{1}{n} > 0$

suite croissante majorée par 2

donc convergente vers  $S \leq 2$

9h12

2 a)  $s_n$  suite croissante

$s_n \leq s_n + \frac{1}{n} = t_n$

$t_n - s_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

$$t_{n+1} - t_n = s_{n+1} - s_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0 \text{ d'après 1 a)}$$

9h18 donc  $t_n$  décroissante

b)

$$s_n < S < t_n = s_n + \frac{1}{n}$$

Prenons  $n = 10$

$$s_{10} < S < s_{10} + 10^{-1}$$

9h21  $s_{10} = 1,48$

3. a) Démontrer que pour tout entier  $k \geq 2$ ,  $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$

b) En déduire que pour tout  $n \geq 1$

$$s_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^2}$$

c) Calculer  $\int_1^n \frac{dt}{t^2}$

d) En déduire que la suite  $s_n$  est croissante

Deuxieme partie  $6,5/6,5$

$$1. P(X) = a_m (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_m) \\ = a_m X^m - a_m (\alpha_1 + \dots + \alpha_m) X^{m-1} + \dots$$

$$\text{d'où} \quad -a_m (\alpha_1 + \dots + \alpha_m) = a_{m-1}$$

$$\text{gh 35} \quad c \quad \bar{a} \quad d \quad b_1 = - \frac{a_{m-1}}{a_m}$$

2 a)

$$\cos((2p+1)\varphi) = \operatorname{Im} e^{i(2p+1)\varphi}$$

$$e^{i(2p+1)\varphi} = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{2p+1}$$

Binome de Newton

$$= \sum_{j=0}^{2p+1} i^j \sin^j \varphi \cos^{2p+1-j} \varphi \binom{2p+1}{j}$$

$$i^j = i \quad \text{si } j = 0 [4]$$

$$i^j = 1 \quad [4]$$

$$-1 \quad 2 [4]$$

$$-i \quad 3 [4]$$

d'où en prenant  $j = 2b+1$

$$i \sin(2p+1)\varphi = \sum_{b=0}^n i^{2b+1} \sin^{2b+1} \varphi \cos^{2p-2b} \varphi \binom{2p+1}{2b+1}$$

$$= \sum_{b=0}^n (-1)^b i \sin^{2b+1} \varphi \cos^{2p-2b} \varphi \binom{2p+1}{2b+1}$$

gh 44

$$b) \sin(2p+1)\varphi = \sin \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \frac{\cos^{2p-2k}\varphi \sin^{2k+1}\varphi}{\sin^{2p+1}\varphi}$$

or

$$\begin{aligned} (\cotan^2 \varphi)^{p-k} \sin^{2p+1}\varphi &= \frac{\cos^{2p-2k}\varphi}{\sin^{2p-2k}\varphi} \sin^{2p+1}\varphi \\ &= \cos^{2p-2k}\varphi \sin^{2k+1}\varphi \end{aligned}$$

d'où l'égalité désirée

gh 49

$$3. a) \text{ Prenons } \varphi = \frac{k\pi}{2p+1} \text{ dans 1 b)}$$

on obtient alors

$$0 = \sin(2p+1) \frac{k\pi}{2p+1} = \sin \frac{k\pi}{2p+1} P(\sqrt{k})$$

$$\text{donc } P(\sqrt{k}) = 0$$

$$b) \forall k \in [1, p] \quad 1 \leq k \leq p$$

$$\text{d'où } 0 < \frac{k}{2p+1} \leq \frac{p}{2p+1} < \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } 0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$$

gh 54

(5)

$\cotan$  est une bijection de  $]0, \pi[$  sur  $\mathbb{R}$

de  $]0, \frac{\pi}{2}[$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$

donc  $\cotan^2$  est une bijection de  $]0, \frac{\pi}{2}[$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$

donc comme les  $\frac{B\pi}{2p+1}$  sont  $p$  reals distincts 2 à 2

de  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , les  $J_k$  sont  $p$  reals  $> 0$

distincts 2 à 2

d'après a) les  $J_k$  sont racines de  $P$

c) d'après 1.

$$\sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{B\pi}{2p+1} = \sum_{k=1}^n J_k = - \frac{(-1)^{1/(2p+1)} / (2 \times 1 + 1)}{(-1)^{0/(2p+1)} / (2 \times 0 + 1)}$$

$$= - \frac{\binom{2p+1}{3}}{\binom{2p+1}{1}} = - \frac{\binom{2p+1}{3} 2p(2p-1)}{6} \times \frac{1}{2p+1}$$

$$= - \frac{p(2p-1)}{3}$$

40 h02

6

$$\cot^2 \varphi + 1 = \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \varphi}$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{2k\pi}{2p+1} \right)} = \sum_{k=1}^n \left( \cot^2 \left( \frac{2k\pi}{2p+1} \right) + 1 \right)$$

$$= \frac{n(2p-1)}{3} + n = n \left( \frac{2p-1}{3} + \frac{3}{3} \right)$$

$$= \frac{n(2p+2)}{3} = \frac{2n(p+1)}{3}$$

10/06/4

$$\forall \varphi \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \quad 0 < \sin \varphi < 1$$

Soit  $f(\varphi) = \varphi - \sin \varphi$

$$f'(\varphi) = 1 - \cos \varphi > 0 \text{ sur } ]0, 2\pi[$$

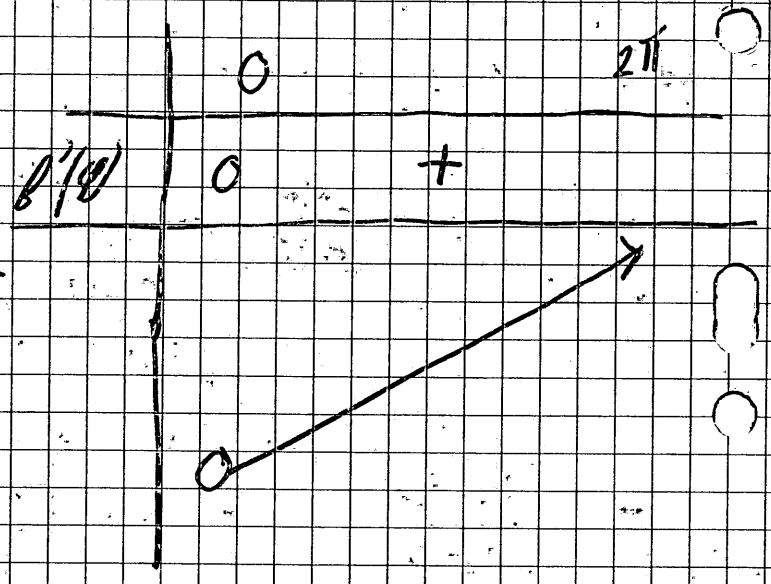
donc  $f$  strictement croissante

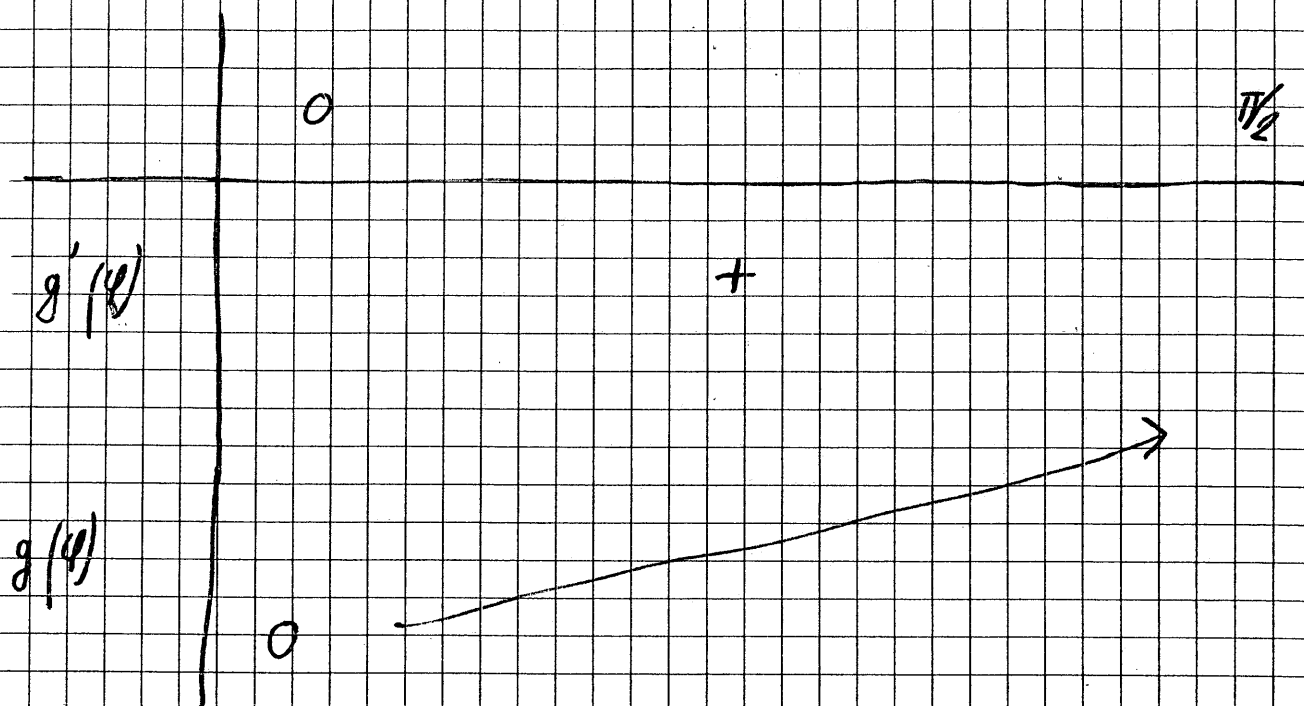
donc  $f(\varphi) > f(0) = 0$

c.à.  $\varphi - \sin \varphi > 0$

Soit  $g(\varphi) = \tan \varphi - \varphi$

$$g'(\varphi) = 1 + \tan^2 \varphi - 1 = \tan^2 \varphi > 0$$





d'ou  $g(\varphi) > 0$  pour tout  $\varphi \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  10 h 15

b) on a donc  $\forall \varphi \in ]0, \frac{\pi}{2}[$

$$0 < \frac{1}{\tan^2 \varphi} < \frac{1}{\varphi^2} < \frac{1}{\sin^2 \varphi}$$

"  $\cotan^2 \varphi$

d'ou

$$\sum_{k=1}^p \cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1} \leq \sum_{k=1}^p \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)^2} \leq \sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}}$$

|| (c)

$$\frac{p(2p-1)}{3}$$

|| (c)

$$\frac{2p(p+1)}{3} \quad 10 h 20$$

c) d'apres b)

$$\frac{p(2p-1)}{3} \times \frac{\pi^2}{(2p+1)^2} \leq s_p \leq \frac{2p(p+1)}{3} \times \frac{\pi^2}{(2p+1)^2}$$

$$\frac{p(2p-1)}{3} \cdot \frac{\pi^2}{(2p+1)^2} - \frac{p(2p-1)}{3} \cdot \frac{\pi^2}{(2p)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{2p(p+1)}{3} \times \frac{\pi^2}{(2p+1)^2} - \frac{2p^2 \pi^2}{3(2p)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

donc d'après le théorème des gendarmes

$$S = \lim s_p = \frac{\pi^2}{6} \quad 10/125$$

5)

$$u_m = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \longrightarrow u = \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}$$

$$u_m + v_m = \sum_{k=1}^{2m+1} \frac{1}{k^2} = s_{2m+1} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6}$$

donc  $v_m$  converge vers  $v = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{4\pi^2 - \pi^2}{24} = \frac{3\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$

$$s_{2m+1} - u_m$$

$$s_m + w_m = \sum_{k=1}^m \frac{1 + (-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=1}^m \frac{2}{k^2} \quad \text{car pour } k=1$$

$$\text{donc } s_{2m+1} + w_{2m+1} = 2 v_m$$

D'après le critère des séries alternées, la suite  $w_m$

converge

$$\lim s_{2m+1} + \lim w_{2m+1} = 2 \lim v_m$$

donc  $\lim_{2m+1} w = 2 \times \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{6}$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{3\pi^2 - 2\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{12}$$

donc  $w_m$  converge vers  $W = \frac{\pi^2}{12}$  10h 40

Prochaine partie

1.  $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}$

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} t^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}$$

2 a)

$$I_{m+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+2} t dt = \int_0^{\pi/2} \cos t \cos^{2m+1} t dt$$

$$\left( \text{ou } \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \cos^{2m} t dt = I_m - \frac{I_{m+1}}{2m+1} \right)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^{2m+1} t dt + (2m+1) \int_0^{\pi/2} (\sin t)^2 \cos^{2m} t dt$$

$$= (2m+1) I_m - (2m+1) I_{m+1}$$

donc 
$$I_{m+1} \left( 1 + \frac{1}{2m+1} \right) = I_m$$

c à d 
$$I_{m+1} = \frac{2m+1}{2m+2} I_m$$

14h49

b) Démonstration par récurrence

$n=0$  on vérifie que 
$$\frac{(2 \times 0)!}{4^0 (0!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = I_0$$

Supposons que 
$$I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

alors 
$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

or 
$$\frac{(2n+2)!}{4^{n+1} ((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)! (2n+1)(2n+2)}{4^n \times 4 (n!)^2 (n+1)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2n)! (2n+1)}{4^n (n!)^2} \frac{(2n+2)}{(2n+2)^2} \frac{\pi}{2}$$

10h54

3 a) 
$$I_m = \int_0^{\pi/2} 1 \cos^{2m} t \, dt = \left[ t \cos^{2m} t \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} t 2m \cos^{2m-1} t \sin t \, dt$$

$$= \left[ t^2 m \sin t \cos^{2m-2} t \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} t^2 m (\cos t \cos^{2m-1} t - (2m-1) \sin^2 t \cos^{2m-2} t) \, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} m t^2 (-\cos^{2m} t + (2m-1)(1-\cos^2 t) \cos^{2m-2} t) \, dt$$
  
 donc intégration par parties.  

$$0 = m(2m-1) I_{m-1} - m 2m I_m$$

11h30

3 b)

$$K_{n-1} - K_n = \frac{4^{n-1} (n-1)!^2}{(2n-2)!} J_{n-1} - \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n$$

$$= \frac{4^{n-1} (n-1)!^2}{(2n-2)! (2n-1)n} n(2n-1) J_{n-1}$$

$$- \frac{4^n (n!)^2}{(2n)! 2n^2} J_n$$

$$= \frac{4^{n-1} (n-1)!^2}{(2n-1)! 2n} (n(2n-1) J_{n-1})$$

$$- \frac{4^{n-1} (n-1)!^2}{(2n)! \times 2} J_n$$

$$= \frac{4^n (n-1)!^2}{(2n)! \times 2} J_n \quad \text{d'après 3 a)}$$

$$= \frac{4^n (n-1)!^2}{(2n)! \times 2} \frac{(2n)! \pi}{4^n (n!)^2 2} \quad \text{2 b)}$$

$$= \frac{\pi}{4n^2}$$

17h 40

$$c) \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{4b^2} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{K_{k-1}}{k-1} - \frac{K_k}{k} \right)$$

$$= K_0 - K_n = J_0 - K_0$$

$$\text{con } K_0 = J_0$$

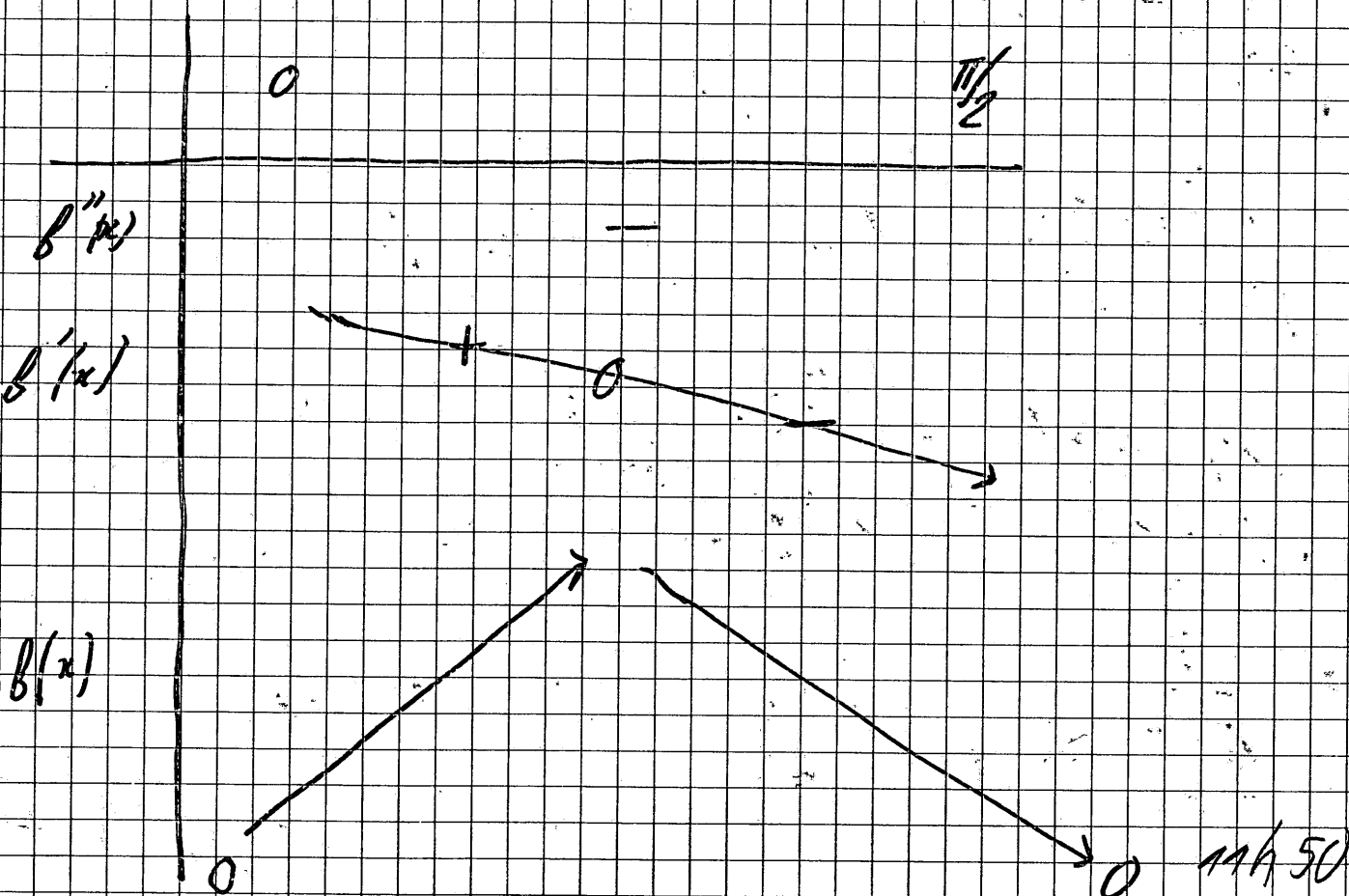
11.6.42

4 a)

$$\text{Sodt } f(x) = \frac{\pi}{2} \sin x - x \quad f(0) = 0 \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} \cos x - 1$$

$$f''(x) = -\frac{\pi}{2} \sin x$$



11.6.50

b) Comme  $t^2 \cos^{2m} t$  positif sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$

$J_m$  aussi

$$t^2 \leq \frac{\pi^2}{4^2} \cos^2 t$$

donc

$$J_m \leq \frac{\pi^2}{4^2} \int_0^{\pi/2} \cos^{2m} t \cos^{2m} t dt$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2m} t \cos^{2m} t dt = \int_0^{\pi/2} \cos t \frac{\cos^{2m+1} t}{2m+1} dt$$

$$+ \int_0^{\pi/2} \cos t \frac{\cos^{2m+1} t}{2m+1} dt = \frac{I_{m+1}}{2m+1}$$

$$= \frac{I_m}{2m+2} \quad \text{d'après 2 a)}$$

d'où  $J_m \leq \frac{\pi^2}{4^2} \frac{I_m}{(2m+2)}$  12 h

$$K_m \leq \frac{4^m (m!)^2}{(2m)!} \frac{\pi^2}{8(m+1)} I_m = \frac{4^m (m!)^2}{(2m)!} \frac{\pi^2}{8(m+1)} \frac{\pi}{4^m (m!)^2 2}$$

$$= \frac{\pi^3}{16(m+1)}$$

4 c) d'après 4 b)

(14)

$$\lim K_m = 0$$

or d'après 3 c)  $\rho_m = \frac{(J_0 - K_m) \times \frac{4}{\pi}}{1}$

$$= \left( \frac{\pi^3}{24} - K_m \right) \times \frac{4}{\pi}$$

$$\longrightarrow \frac{\pi^3}{24} \times \frac{4}{\pi} = \frac{\pi^2}{6}$$

Quatrième partie

$$1. D_m(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$$

$$2. D_m(x) = \sum_{k=-m}^m e^{ikx} = e^{-imx} \frac{1 - e^{i(2m+1)x}}{1 - e^{ix}}$$

$$= \frac{e^{-imx} \left( e^{i \frac{2m+1}{2} x} - e^{-i \frac{2m+1}{2} x} \right)}{e^{ix/2} \left( e^{-ix/2} - e^{ix/2} \right)}$$

$$= \frac{\sin \frac{2m+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$$