

(1)

$\forall n \geq 5$ A_n n'est pas résoluble

Penn. chap 1 § 8

Penn. ^{chap 1 § 1} Exemples 2 b)

Les cycles d'ordre 3 engendrent A_n pour $n \geq 3$.

Preuve Toute permutation paire est produit d'un nombre pair de transpositions

$$\begin{pmatrix} a, b \\ b, a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b, c \\ c, b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \downarrow & & \downarrow \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, b, c \end{pmatrix}$$

↑
élément dans les 2 supports des transpositions

$$(a, b) \circ (c, d) = \underbrace{(a, b) \circ (a, c) \circ (a, c) \circ (c, d)}_{(b, a, c)}$$

Penn. chap 1 § 4 Ex B 3)

Si $n \geq 5$ les 3 cycles sont conjugués dans A_n

Rappel $\sigma(a_1, \dots, a_\ell) \sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_\ell))$

$\sigma \in S_n$ $a_1, \dots, a_\ell$ cycle de longueur ℓ

Soit (a_1, a_2, a_3) un 3-cycle, on veut que

$$\sigma(1, 2, 3) \sigma^{-1} = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)) \quad \text{avec } \sigma \in A_n$$

Soit $\{a_4, a_5, \dots, a_n\} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ privé de a_1, a_2, a_3

on prend $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} \in S_n$

on a démontré que les 3 cycles sont conjugués dans S_n grâce à σ

Si $\sigma \in A_n$ c'est bon

sinon $(a_4, a_5) \circ \sigma \in A_n$

Preuve de A_n n'est pas résoluble

Soit $\sigma = (a, b, c)$ un cycle de longueur 3 quelconque

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} = (a, c, b) \text{ est encore un cycle de longueur 3}$$

donc $\exists \gamma \in A_n \text{ tq } \sigma^2 = \gamma^{-1} \sigma \gamma$

donc $\sigma = \sigma^{-1} \gamma^{-1} \sigma \gamma \in E$ est un commutateur

donc $\sigma \in D(A_n)$

Comme A_n est engendré par les cycles de longueur 3

$$D(A_n) = A_n \text{ donc } A_n \text{ n'est pas résoluble}$$

Preuve de A_n est simple si $n \geq 5$

ref Delcourt Théorie des groupes

Exercice 3.2.9 p 74 avec son corrigé p 80

Contrairement à ce que dit Delcourt, sa démonstration marche dans le cas $n = 5$

Soit $n \geq 5$. Soit H un sous-groupe distingué de A_n

1) Lemme

Si $\gamma \in H$ et $\sigma \in A_n$ alors le commutateur

$$[\sigma, \gamma] \stackrel{\text{def}}{=} \sigma \gamma \sigma^{-1} \gamma^{-1} \in H.$$

De plus si σ est le 3 cycle (α, β, γ)
alors $[\sigma, \gamma] = (\alpha, \beta, \gamma) (\gamma(\alpha), \gamma(\gamma), \gamma(\beta))$

Preuve de 1) Comme H distingué dans A_n , le conjugué de γ par σ , $\sigma \gamma \sigma^{-1} \in H$ donc $[\sigma, \gamma] \in H$.

$$\begin{aligned} [(\alpha, \beta, \gamma), \gamma] &= (\alpha, \beta, \gamma) \gamma (\alpha, \beta, \gamma)^{-1} \gamma^{-1} \\ &= (\alpha, \beta, \gamma) (\gamma(\alpha), \gamma(\gamma), \gamma(\beta)) \gamma^{-1} \text{ est égal} \\ &\text{d'après la formule pour le conjugué d'un cycle } \sigma^{-1} \\ &= (\alpha, \beta, \gamma) (\gamma(\alpha), \gamma(\gamma), \gamma(\beta)) \end{aligned}$$

2) Soit T un élément de H différent de l'identité (4)

$T \neq id$. Donc $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tq $T(i) \neq i$

Soit $j := T(i)$

Comme $n \geq 5 \geq 4$, $\exists k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i, j, T(j)\}$

d'après comme 1) applique à $\sigma = (i, k, j)$ et à T

$[\sigma, T] \in H$ et

$$[\sigma, T] = (i, k, j) \left(\begin{smallmatrix} T(i) \\ T(j) \\ T(k) \end{smallmatrix} \right)$$

donc le support de $[\sigma, T]$ est inclus dans $\{i, j, k, T(j), T(k)\}$

3) Posons $\rho = [\sigma, T]$

Montrons que $\rho \neq id$. En effet si $\rho = id$

alors $(i, j, k) = (j, T(j), T(k))$ donc $k = T(j)$

contradiction donc $\rho \neq id$

Montrons que H contient un 3-cycle

Décomposons $\rho = [\sigma, T]$ en cycles distincts

on peut avoir $\rho = c_1$ un seul cycle de longueur 3 ou 5

ou bien $\rho = c_1 c_2$ deux cycles de longueur 2

on a donc 3 cas

cas $\rho = c_1$ un cycle de longueur 3

alors H contient un 3-cycle

cas $\rho = c_1 = (a, b, c, d, e)$ un cycle de longueur 5

D'après le lemme 1)

⑤

$$[(a, b, c), \rho] \in H$$

$$\begin{aligned} \text{et } [(a, b, c), \rho] &= (a, b, c) (\rho(a), \rho(b), \rho(c)) \\ &= (a, b, c) (b, d, c) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix} = (a, b, d) \end{aligned}$$

donc H contient le 3-cycle (b, d, a)

$$\text{car } \rho = (a, b)(c, d)$$

on considère $e \notin \{a, b, c, d\}$

d'après le lemme 1

$$[(a, b, e), \rho] \in H$$

$$\begin{aligned} \text{et } [(a, b, e), \rho] &= (a, b, e) (\rho(a), \rho(b), \rho(e)) \\ &= (a, b, e) (b, e, a) = \begin{pmatrix} a & b & e \\ e & a & b \end{pmatrix} = (a, e, b) \end{aligned}$$

donc H contient le 3 cycle (a, e, b)

Conclusion Dans tous les cas, H contient un 3-cycle

tous les 3 cycles sont conjugués dans A_n

donc comme H est distingué dans A_n , H contient tous les 3 cycles

Les cycles d'ordre 3 engendrent A_n donc $H = A_n$.

Remarque La démonstration du Corollaire Algèbre et Géométrie

Exercice 4.11 est fautive dans le cas

$\rho =$ un 5-cycle car H n'est pas distingué dans S_n a priori.