

Corrige' Agregation 2002

Mathématiques generales

I
1°

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x+y, x+y) &= \mathcal{B}(x, x) + \mathcal{B}(y, y) + \mathcal{B}(x, y) + \mathcal{B}(y, x) \\ &= \mathcal{B}(x, x) + \mathcal{B}(y, y) + \mathcal{B}(x, y) + \overline{\mathcal{B}(x, y)} \end{aligned}$$

donc $2 \operatorname{Re} \mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}(x+y, x+y) - \mathcal{B}(x, x) - \mathcal{B}(y, y)$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x+iy, x+iy) &= \mathcal{B}(x, x) + \mathcal{B}(iy, iy) + \mathcal{B}(x, iy) + \mathcal{B}(iy, x) \\ &= \mathcal{B}(x, x) - i^2 \mathcal{B}(y, y) - i \mathcal{B}(x, y) + i \overline{\mathcal{B}(x, y)} \\ &= \mathcal{B}(x, x) + \mathcal{B}(y, y) - i 2i \operatorname{Im} \mathcal{B}(x, y) \end{aligned}$$

donc $2 \operatorname{Im} \mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}(x+iy, x+iy) - \mathcal{B}(x, x) - \mathcal{B}(y, y)$

donc en additionnant les 2 equations obtenues

$$\begin{aligned} 2 \mathcal{B}(x, y) &= 2 \operatorname{Re} \mathcal{B}(x, y) + 2i \operatorname{Im} \mathcal{B}(x, y) = \\ &= -(1+i) \mathcal{B}(x, x) + (1+i) \mathcal{B}(y, y) + \mathcal{B}(x+y, x+y) + i \mathcal{B}(x+iy, x+iy) \end{aligned}$$

donc $\mathcal{B}(x, y) = \frac{\mathcal{B}(x+y, x+y) + i \mathcal{B}(x+iy, x+iy) - (1+i) [\mathcal{B}(x, x) + \mathcal{B}(y, y)]}{2}$

Rappel 3.2.4 (4) tome 2

donc si $\forall x \in E \quad \mathcal{B}(x, x)$ est nulle

alors $\forall x, y \in E \quad \mathcal{B}(x, y) = 0$

donc il existe un $x \in E$ tq $\mathcal{B}(x, x) \neq 0$

Soit $\mathcal{B}(x, x) > 0$ on prend $y = \frac{x}{\sqrt{\mathcal{B}(x, x)}}$ donc $\mathcal{B}(y, y) = 1$

soit $b(x, x) < 0$

on $y = \frac{x}{\sqrt{-b(x, x)}}$

$$b(y, y) = -1$$

(2)

2°) demo habituelle de l'existence d'une base orthogonale
démonstration par récurrence sur la dimension de E

cas $\dim E = 1$ est clair

Si $\dim E = n$

Soit b est nulle et dans ce cas toute base
de E est demi-orthonormée car $b(e_i, e_j) = 0$
pour tout i, j .

Soit b est non nulle donc il existe un vecteur
 $y \in E$ tel que $b(y, y) = \pm 1$

$$\begin{array}{ccc} b(\cdot, y): E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & b(x, y) \end{array} \quad \text{est une forme}$$

linéaire non nulle donc son noyau est
de $\dim n-1$

$$\text{Ker } b(\cdot, y) = y^\perp$$

Soit $y \in y^\perp \cap \text{vect } y$ donc $y = \lambda y$ et $b(y, y) = b(\lambda y, y)$
 $= \lambda b(y, y) = 0$ donc $\lambda = 0$

donc $y^\perp \cap \text{vect } y = \{0\}$

$$\dim E = \text{vect } y \oplus y^\perp$$

par hypothèse de récurrence, $y^\perp$ admet une base

semi-orthonormée pour $\mathcal{B}/y^\perp \times y^\perp$

(3)

La réunion de cette base et de y est une base semi-orthonormée pour E

3° $\mathcal{B}((x,y)/(x',y')) = x \bar{y}' + y \bar{x}'$

$$\mathcal{B}((1,0),(0,1)) = 1$$

$$\mathcal{B}((1,0),(1,0)) = 0$$

$$\mathcal{B}((0,1),(0,1)) = 0$$

Comme $(1,1) = (1,0) + (0,1)$

$$\mathcal{B}((1,1),(1,1)) = \mathcal{B}((1,0),(1,0)) + \mathcal{B}((0,1),(0,1))$$

$$+ 2 \operatorname{Re}(\mathcal{B}((1,0),(0,1))) = 0 + 0 + 2 \times 1$$

$$\therefore \mathcal{B}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (1,1) \right)^\perp \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{B}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, (1,1)\right) = 0$$

$$\mathcal{B}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, (1,1)\right) = \mathcal{B}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, (1,0)\right) + \mathcal{B}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, (0,1)\right)$$

$$= x \mathcal{B}((1,0),(1,0)) + y \mathcal{B}((0,1),(1,0)) + x \mathcal{B}((1,0),(0,1)) + y \mathcal{B}((0,1),(0,1)) = y + x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (1,1), \frac{\sqrt{2}}{2} (1,-1) \text{ est une base semi-orthonormée}$$

$$\text{car } \mathcal{B}((1,-1),(1,-1)) = 0 + 0 + 2 \times -1 = -2$$

4° Comme les e_i sont une base orthogonale

(4)

$$\begin{aligned} & b\left(\sum_i \lambda_i e_i, \sum_i \lambda_i e_i\right) \text{ d'après la formule} \\ &= \sum_i b(\lambda_i e_i, \lambda_i e_i) \text{ pour } b(x+y, x+y) \\ &= \sum_i |\lambda_i|^2 b(e_i, e_i) \end{aligned}$$

a) Soit $x \in F \cap (E_- \oplus E_0)$ non nul.

Comme b est définie positive sur F , $b(x) > 0$

$x \in E_- \oplus E_0$ donc $x = \sum_i \lambda_i e_i$ avec $b(e_i, e_i) \leq 0$

$$\text{donc } b(x, x) = \sum_i |\lambda_i|^2 b(e_i, e_i) \leq 0$$

Contradiction donc $F \cap (E_- \oplus E_0) = \{0\}$

de même $F \cap (E_+ \oplus E_0) = \{0\}$ si b définie négative sur F .

b est la démonstration du théorème d'Inertie de Sylvester

b) Soit μ la dimension maximale d'un sous-espace F

tel que $b|_F$ est définie positive

d'après a) la somme $F \cap (E_+ \oplus E_-)$ est directe

$$\text{donc } \dim F + \dim E_+ + \dim E_- \leq \dim E$$

$$\text{donc } \dim F \leq \dim E_+ \text{ donc } \mu \leq \dim E_+$$

Si on prend $F = E_+$ on obtient $\mu \geq \dim E_+$

$$\text{donc } \mu = \dim E_+$$

De même Soit q la dimension maximale

d'un sous-espace tel que $b|_F$ est définie négative

$$\text{on a } q = \dim E_-$$

C'est la démonstration du théorème d'inertie de Sylvester (5)

$\sum b(e_i, e_i) = \dim E_+ - \dim E_- = p - q$
est indépendant de B car p et q ont été
définies indépendamment de B .

$$5) \quad b(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) \\ = \sum_{i+j=n+1} x_i \bar{y}_j$$

Donnons une base orthogonale pour b

quand $n=2$ déjà au 3°

$$e_i + e_j \quad i+j=n+1 \quad i < j \\ e_i - e_j$$

$$e_{\frac{n+1}{2}} \quad \text{si } n+1 \text{ pair}$$

$$e_1 + e_n, e_2 + e_{n-1}, \dots, e_i + e_{n+1-i} \quad 1 \leq i < \frac{n+1}{2}$$

$$e_1 - e_n, e_2 - e_{n-1}, \dots, e_i - e_{n+1-i}$$

$e_{\frac{n+1}{2}}$ si $n+1$ pair est une base orthogonale
car b restreint à $\text{vect}(e_i, e_j)$ avec $i+j=n+1$
coïncide avec la forme sesquilinéaire vu au 3°

$$E_+ = \text{vect } e_i + e_{n+1-i} \quad 1 \leq i < \frac{n+1}{2}$$

et $e_{\frac{n+1}{2}}$ si $n+1$ pair.

$$E_- = \text{vect } e_i - e_{n+1-i} \quad 1 \leq i < \frac{n+1}{2}$$

$$\text{d'où } b(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } n+1 \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

6°) a) Soit $x \in E^\perp$. Soit S une supplémentaire de $\text{vect } x$. D'après 2) $b|_S$ admet une base semi-orthonormée $(e_2, \dots, e_n)$. Posons $e_1 = x \neq 0$.
 $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base semi-orthonormée car $b(e_i, e_j) = 0$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.

b) $b(x, x) \neq 0$

et 1°) on prend $e_1 = \frac{x}{\sqrt{b(x, x)}}$

après déjà vu au 2°)

c) On suppose $b(x, x) = 0$ et $x \notin E^\perp$.
 La forme linéaire $E \longrightarrow \mathbb{C}$
 $y \longmapsto b(y, x)$ est non nulle

car $x \notin E^\perp$. Donc surjective donc il existe $y \in E$

tg $b(y, x) = 1$. Soit $\tilde{y} = y - \lambda x$

$$b(\tilde{y}, \tilde{y}) = b(y, y) - 2 \operatorname{Re} \lambda$$

En prenant $\lambda = \frac{b(y, y)}{2}$. On a $b(\tilde{y}, \tilde{y}) = 0$

$$b(\tilde{y}, x) = b(y - \lambda x, x) = 1$$

(7)

la restriction de $b|_{\text{vect}(x,y)}$

a pour matrice la matrice A du 3°
dans la base x, y

résolvons donc le problème 6 c) pour A et $x = (1, 0)$

$$b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 \bar{y}_2 + x_2 \bar{y}_1$$

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (1, 0)$$

$$x_1 + y_1 = 1$$

$$x_1(-\bar{x}_2) + x_2(1 - \bar{x}_1) = 0$$

$$x_2 + y_2 = 0$$

$$\text{c à d } x_2 = x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2$$

on voit que $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ convient

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Revenons au cas général

$$\text{on prend } e_1 = \frac{x+y}{2} \quad e_2 = \frac{x-y}{2}$$

démontrons que $\text{vect}(x, y) \cap \text{vect}(x, y)^\perp = \{0\}$

Soit $y \in \text{vect}(x, y) \cap \text{vect}(x, y)^\perp$

$$y = \lambda x + \mu y$$

$$b(y, x) = \lambda b(x, x) + \mu b(y, x) = 0 \Rightarrow \mu = 0$$

par symétrie entre x et y $\lambda = 0$

$$\text{vect}(x, y)^\perp = \left\{ y \in E \text{ tq } \begin{array}{l} b(y, x) = 0 \\ b(y, y) = 0 \end{array} \right\}$$

est le noyau de l'application $\beta: E \longrightarrow \mathbb{C}^2$ (8)
 $u \longmapsto (\beta(u, x), \beta(u, y))$.

$$\text{Ker } \beta|_{\text{Vect}(x, y)} = \text{Vect}(x, y) \cap \text{Ker } \beta = \text{Vect}(x, y) \cap \text{Vect}(x, y)^\perp \\ = \{0\}$$

donc $\beta|_{\text{Vect}(x, y)}: \text{Vect}(x, y) \longrightarrow \mathbb{C}^2$ application linéaire

injective est un isomorphisme donc β est surjective

donc $\dim \text{Ker } \beta + \text{rang } \beta = \dim E$

c a d $\dim \text{Vect}(x, y)^\perp + 2 = \dim E$

donc $E = \text{Vect}(x, y) \oplus \text{Vect}(x, y)^\perp$.

(9)

7) can b a)

$$x \in E^\perp \text{ dann } G = x^\perp = E$$

can b b)

$$G = x^\perp = \overset{\text{vect}}{\{e_2, \dots, e_n\}}$$

can b c)

$$\text{Sei } y \in E$$

$$y = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

$$\begin{aligned} b(x, y) &= b(e_1, y) + b(e_2, y) \\ &= \bar{\lambda}_1 b(e_1, e_1) + \bar{\lambda}_2 b(e_2, e_2) \\ &= (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2) b(e_1, e_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{can } b(x, x) &= b(e_1 + e_2, e_1 + e_2) \\ &= b(e_1, e_1) + b(e_2, e_2) + 2 \operatorname{Re} b(e_1, e_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$b(e_1, e_2) = b(e_2, e_2) = 0$$

$$\Rightarrow x \in E^\perp$$

$$\text{dann } b(e_1, e_1) \neq 0$$

$$\text{dann } b(x, y) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

$$G = x^\perp = \text{vect} \{x, e_3, \dots, e_n\}$$

cas 6 a) $x \in E^\perp$ donc $B(x, x) = 0$
donc $b(F) = 0$

(10)

comme $G = E$ on a bien

$$b(E) = b(F) + b(G)$$

cas 6 b)

$$b(E) = b(e_1, e_1) + \sum_{i=2}^n b(e_i, e_i) \\ = b(F) + b(G)$$

car e_1 base semi-orthonormée de F

et $e_2, \dots, e_n$ ————— de G

cas 6 c) $b(F) = 0$ car $B(x, x) = 0$

$$b(G) = b(x, x) + \sum_{i=3}^n b(e_i, e_i)$$

car $x, e_3, \dots, e_n$ est une base semi-orthonormée
de G

$$b(x, x) = b(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = b(e_1, e_1) + b(e_2, e_2)$$

$$\text{donc } b(G) = \sum_{i=1}^n b(e_i, e_i) = b(E)$$

g°) démonstration par récurrence sur i

$$i = 1 \quad F_1 = \mathbb{C}e_1 \quad G_1 = F_1^\perp$$

$$\text{d'après 7° on a } b(F_1) + b(G_1) = b(E)$$

Supposons que au rang $i < \mu$

$$\delta(F_i) + \delta(G_i) = \delta(E)$$

$u_{i+1} \in G_i = F_i^\perp$ car base orthogonal

d'après 7° appliqué à l'espace vectoriel
symétrique $(G_i, \mathcal{B}|_{G_i})$ et au vecteur u_{i+1}

$$\delta(\mathbb{C} u_{i+1}) + \underbrace{\delta(u_{i+1}^\perp \cap G_i)}_{G_{i+1}} = \delta(G_i)$$

donc

$$\delta(F_i) + \delta(\mathbb{C} u_{i+1}) + \delta(G_{i+1}) = \delta(E)$$

Comme $\forall i (i < \mu) \quad \delta(F_i) = \delta(\mathbb{C} u_1) + \dots + \delta(\mathbb{C} u_i)$

$$\delta(F_i) + \delta(\mathbb{C} u_{i+1}) = \delta(F_{i+1})$$

d'où $\delta(F_{i+1}) + \delta(G_{i+1}) = \delta(E)$

en prenant $i = \mu$ comme $F_\mu = F$

$$\delta(F) + \delta(F^\perp) = \delta(E)$$

$$\text{II } 1^\circ) a) \text{ Soit } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$$

$$b(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j b(e_i, e_j)$$

$$M \bar{Y} = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & \dots & b(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ b(e_n, e_1) & \dots & b(e_n, e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n b(e_1, e_j) \bar{y}_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n b(e_n, e_j) \bar{y}_j \end{pmatrix}$$

une ligne

donc

$$\begin{aligned} {}^t X M \bar{Y} &= \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} M \bar{Y} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n b(e_i, e_j) \bar{y}_j \right) = b(x, y) \end{aligned}$$

b) c) démontrons que $E^\perp = \{0\} \Leftrightarrow M$ est inversible

$$y \in E^\perp \Leftrightarrow \forall x \in E \quad b(x, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \quad {}^t X M \bar{Y} = 0$$

$$\Leftrightarrow M \bar{Y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{Y} \in \text{Ker } M$$

prendre $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $E^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \text{Ker } M = \{0\} \Leftrightarrow M \text{ inversible}$

de même ${}^\perp E = \{0\} \Leftrightarrow M \text{ inversible}$

donc $E^\perp = \{0\} \Leftrightarrow {}^\perp E = \{0\}$

$\Leftrightarrow B$ est non dégénérée

2 a) Soient $x, y \in F^\perp$ λ et $\mu \in \mathbb{C}$

$$\forall z \in F \quad B(z, x) = 0 \\ \text{et } B(z, y) = 0$$

$$\text{donc } B(z, \lambda x + \mu y) = \bar{\lambda} B(z, x) + \bar{\mu} B(z, y) = 0$$

donc $\lambda x + \mu y \in F^\perp$

de même pour ${}^\perp F$

b) Soit $u_1, \dots, u_p$ une base de F

$$\begin{aligned} {}^\perp F &= {}^\perp_{u_1} \cap \dots \cap {}^\perp_{u_p} \\ &= \text{Ker } B(\cdot, u_1) \cap \dots \cap \text{Ker } B(\cdot, u_p) \end{aligned}$$

intersection du noyau de p formes linéaires

est de dim $\geq \dim E - p$

$$\text{donc } \dim F + \dim {}^\perp F = p + \dim {}^\perp F \geq \dim E$$

de même

$$F^\perp = \text{Ker } \overline{B(u_1, \cdot)} \cap \dots \cap \text{Ker } \overline{B(u_p, \cdot)}$$

car B est non dégénérée

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad} & E^* \\ y \mapsto & B(\cdot, y) : E \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ x \mapsto & & B(x, y) \end{array}$$

a pour moyen $E^\perp$

donc est un isomorphisme si $\mathcal{B}$ est non
degeneree d'apres 1 c)

Comme $u_1, \dots, u_p$ famille libre,

$\mathcal{B}(\cdot, u_1), \dots, \mathcal{B}(\cdot, u_p)$ sont des formes
lineaires independantes donc l'intersection
de leur noyau est exactement

de dimension $\dim E - p$

d'où $\dim F^\perp + \dim F = \dim E$

de même avec $\dim F^\perp + \dim F = \dim E$

c) $\mathcal{B}$ est non degeneree sur F

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} F \cap F^\perp = \{0\}$$

$$\text{et } F \cap {}^\perp F = \{0\}$$

donc la somme $F + F^\perp$ est directe

$$\text{donc } = \dim(F + F^\perp) = \dim F + \dim F^\perp \geq \dim E$$

$$\text{donc } E = F \oplus F^\perp$$

$$\text{de même } E = F \oplus {}^\perp F$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \mathcal{B}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= \mathcal{B}((x_1, x_2), y_1 e_1) + \mathcal{B}((x_1, x_2), y_2 e_2) \\ &= x_1 \bar{y}_2 + x_2 \bar{y}_1 \end{aligned}$$

premier $F = \mathbb{C} e_1$

Soit $x = (x_1, x_2) \in E$ $b((x_1, x_2), (1, 0)) = 0$

donc $F^\perp = E$

$$(x_1, x_2) \in F^\perp \Leftrightarrow b((1, 0), (x_1, x_2)) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$$

donc $F^\perp = \mathbb{C} e_1$

4°) A l'aide des opérations élémentaires, la matrice M se décompose comme

$$M = P A Q$$

où P et Q sont des matrices inversibles
et A la matrice diagonale avec r 1
sur la diagonale et après des 0 où r
désigne le rang de M

$$\begin{aligned} b(x, y) &= {}^t x P A Q \bar{y} \\ &= {}^t x P {}^t \bar{Q}^{-1} {}^t \bar{Q} A Q y \\ &= {}^t (\bar{Q}^{-1} {}^t P x) {}^t \bar{Q} A Q y \end{aligned}$$

Soit β l'isomorphisme représenté par les matrices
 $(\bar{Q}^{-1} {}^t P)^{-1} = {}^t P^{-1} \bar{Q}$

$$b(\beta(x), y) = {}^t x {}^t \bar{Q} A Q y$$

donc est symétrique

5°)

$$a) \left. \begin{aligned} b(x, y) &= \varepsilon \overline{b(y, x)} \\ b(y, x) &= \varepsilon \overline{b(x, y)} \end{aligned} \right\}$$

donc $b(x, y) = \varepsilon \overline{\varepsilon \overline{b(x, y)}} = \varepsilon \bar{\varepsilon} b(x, y)$

Si b est non nulle $\exists x, y$ tq $b(x, y) \neq 0$

donc $\varepsilon \bar{\varepsilon} = 1$

b) en dimension 2 on peut prendre

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

$$b(e_1, e_2) = 1$$

$$b(e_2, e_1) = \varepsilon$$

$$\varepsilon \overline{b(e_1, e_2)} = \varepsilon$$

car $\varepsilon = -1$ correspond au déterminant 2.2.

en dimension 1

Soit $\eta = b(e_1, e_1)$

on veut $b(e_1, e_1) = \varepsilon \overline{b(e_1, e_1)}$

cà d $\eta = \varepsilon \bar{\eta}$

$$\frac{\eta}{\bar{\eta}} = \varepsilon \quad \frac{\eta \eta}{\eta \bar{\eta}} = \varepsilon$$

on peut donc prendre η un des racines 2.èmes de ε

comme ε de module 1, η est de module 1 donc $\eta \bar{\eta} = 1$

et $\eta^2 = \varepsilon$ donc $\frac{\eta^2}{|\eta|^2} = \varepsilon$

en dim 1 $\left(\eta \right)$

6° a) αB est une forme sesquilinéaire symétrique

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in E \quad \alpha B(x, y) = \overline{\alpha B(y, x)}$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in E \quad \alpha B(y, x) = \overline{\alpha B(x, y)}$$

Il suffit donc de prendre α tq $\alpha \varepsilon = \overline{\alpha}$

$$\alpha \varepsilon = \overline{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \varepsilon \overline{\varepsilon} = \overline{\alpha} \overline{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\overline{\alpha}} = \overline{\varepsilon}$$

on peut prendre donc pour α un des racines deuxième de $\overline{\varepsilon}$ cf ce que j'ai fait au 5° b)

b) déjà fait au a) Soit B une forme sesquilinéaire ε -symétrique non nulle

$$B B \text{ est symétrique} \Leftrightarrow B \varepsilon = \overline{B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{B}{\overline{B}} = \frac{\alpha}{\overline{\alpha}} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{B} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{B}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{B} \text{ est réelle}$$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base semi-orthonormée pour B

$$b(E, B) = \sum_{i=1}^n B(e_i, e_i)$$

Soit $x = \frac{\alpha}{B} \in \mathbb{R}$

$$\alpha B\left(\frac{e_i}{\sqrt{|x|}}, \frac{e_i}{\sqrt{|x|}}\right) = x B\left(\frac{e_i}{\sqrt{|x|}}, \frac{e_i}{\sqrt{|x|}}\right) = \frac{x}{|x|} B(e_i, e_i)$$

donc $\left(\frac{e_1}{\sqrt{|x|}}, \dots, \frac{e_n}{\sqrt{|x|}}\right)$ est une base semi-orthonormée pour αB

$$\sigma(E, \alpha \beta) = \sum_{i=1}^n \alpha \beta \left(\frac{e_i}{\sqrt{|x|}}, \frac{e_i}{\sqrt{|x|}} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{x}{|x|} \beta \left(\frac{e_i}{\sqrt{|x|}}, \frac{e_i}{\sqrt{|x|}} \right)$$

$$= \frac{x}{|x|} \sigma(E, \beta)$$

donc $\sigma(E, \beta) = \sigma(E, \alpha \beta) \alpha^{-1} \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}^{+*}$

$-\sigma(E, \alpha \beta) \text{ si } \alpha \in \mathbb{R}^{-*}$

III

1) $\beta(x, y) - \mu \overline{\beta(y, x)} = \alpha \beta(x) \overline{\beta(y)}$

donc $\overline{\beta(x, y)} - \bar{\mu} \beta(y, x) = \bar{\alpha} \overline{\beta(x)} \beta(y)$

donc $\overline{\beta(y, x)} - \bar{\mu} \beta(x, y) = \bar{\alpha} \overline{\beta(y)} \beta(x)$

$x = \mu$ donne

donc $-\mu \overline{\beta(y, x)} + \mu \bar{\mu} \beta(x, y) = -\mu \bar{\alpha} \overline{\beta(y)} \beta(x)$

donc $\forall x, y \quad \alpha \beta(x) \overline{\beta(y)} = -\mu \bar{\alpha} \overline{\beta(y)} \beta(x)$

comme β est non nulle $\alpha = -\mu \bar{\alpha}$ c-à-d $\mu = \frac{-\alpha}{\bar{\alpha}} = \varepsilon$

2 a) Soit $\varphi: E \longrightarrow E^*$ le dual de ε

$$e \longmapsto \beta(\cdot, e)$$

$\text{Ker } \varphi = E^\perp = \{0\}$ car β non dégénérée

donc φ application linéaire injective entre deux espaces de même dimension (Comme E de dim finie, E^* est de dimension ^{finie} de même dimension), donc φ est un isomorphisme donc $\exists$ un unique vecteur e

t.q. $\varphi(e) = \beta$ c-à-d $\forall x \in E \quad \beta(x, e) = \beta(x)$

α' apres SQ

$$b(e) - \varepsilon \overline{b(e)} = \alpha b(e) \overline{b(e)}$$

$$b(e) + \frac{\alpha}{\alpha'} \overline{b(e)} = \alpha b(e) \overline{b(e)}$$

$$\alpha b(e) + \alpha \overline{b(e)} = \alpha b(e) \alpha \overline{b(e)}$$

$$1 - \lambda + 1 - \bar{\lambda} = (1 - \lambda) / (1 - \bar{\lambda})$$

$$2 - \lambda - \bar{\lambda} = 1 - \lambda - \bar{\lambda} + \lambda \bar{\lambda}$$

donc $\lambda \bar{\lambda} = 1$