Chapitre I : Géométrie et trigonométrie

A. Géométrie

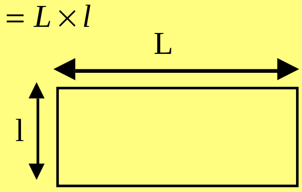
Nous montrerons d'abord comment retrouver les formules de base du calcul des surfaces et volumes élémentaires; la connaissance de ces formules fait partie, comme nous le verrons, des pré-requis nécessaires à la progression dans les disciplines scientifiques.

1. Surfaces élémentaires

Comment calculer surface du rectangle

- Le **rectangle** de longueur L et de largeur l : $S = L \times l$

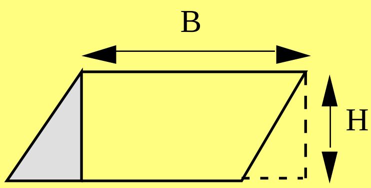
Cas particulier : le carré de côté C
S = C x C



Comment calculer surface du parallélogramme

- Le **parallélogramme** de base B et de hauteur H : $S = B \times H$

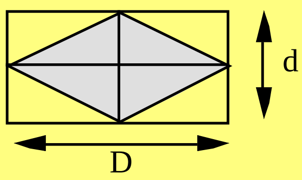
En effet, si le triangle hachuré à gauche est déplacé (translaté) du côté droit, on retrouve la surface du rectangle.



Comment calculer surface du losange

- Le **losange** de grande diagonale D et de petite diagonale d : $S = (D \times d)/2$

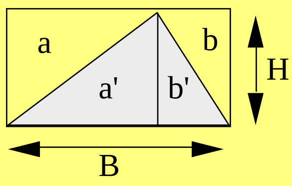
En effet, sa surface est la moitié de celle du rectangle dans lequel il est inscrit



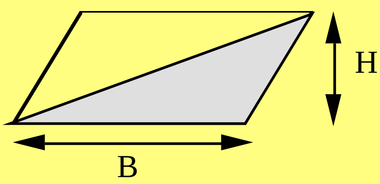
Comment calculer surface du triangle

- Le **triangle** de base B et de hauteur H : $S = (B \times H)/2$

En effet, par l'égalité des surfaces a et a' ainsi que b et b', sa surface est la moitié de celle du rectangle dans lequel il est inscrit.



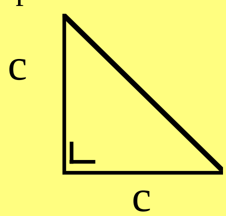
La même formule vaut pour le triangle ci-contre qui est la moitié du parallélogramme représenté.



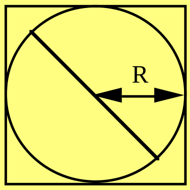
Cas particuliers de triangles :

- le triangle équilatéral a 3 côtés égaux;
- le triangle isocèle a 2 côtés égaux;
- le triangle rectangle a 2 côtés perpendiculaires.

Voici par exemple un triangle isocèle et rectangle.



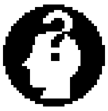
- Le **disque** de rayon R



On appelle diamètre un segment passant par le centre du disque et limité à ses bords.

La **surface du carré** ‘entourant’ ce disque est : $S = (2R) \times (2R) = 4R^2$

On peut montrer que la surface de ce disque est : $S = 3{,}1416\ldots \times R^2$



Comment calculer surface du disque

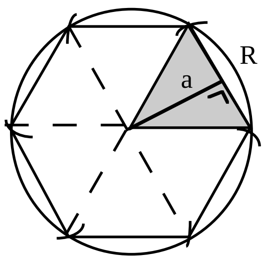
En notant par la lettre grecque π (pi) le nombre 3,1416…, on écrira la surface du disque : $S = \pi R^2$.

Application

Comment construire un hexagone

Considérons l’hexagone (l’origine de ce mot est grecque, *hexa* signifie six et *gônia* signifie angle). On le construit en dessinant un cercle et en reportant six fois le rayon déterminé par le compas sur le pourtour du cercle.

On remarque que chacun de ses côtés est égal au rayon du cercle que nous noterons R. Dessinons à partir du centre deux rayons joignant deux sommets consécutifs de l’hexagone.
On appelle apothème la perpendiculaire menée du centre du cercle circonscrit sur le côté de l’hexagone, nous la noterons a.



- La **surface du triangle grisé** vaut

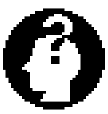
$$S = \frac{a \times R}{2}$$

- La **surface de l’hexagone** (6 triangles équilatéraux) est donc

$$S = 6 \times \frac{a \times R}{2} = 3aR$$

Cette surface est très proche de celle du disque; pour s’en convaincre, disons que a est relativement proche de R, ce qui se notera : $a \approx R$.

La formule devient $S \approx 3R^2$ (au lieu de 3,1416 R^2).
Le périmètre de l’hexagone est aussi relativement proche (mais inférieur) de celui du disque.



Comment calculer le **périmètre** du disque

- Le **périmètre de l’hexagone** est : $P = 6 \times R$
  Celui du **disque** $P = 2\pi R$, c’est-à-dire $P = 6{,}2832 \times R$

Une mesure de π

Déterminons le pourtour d’un CD à l’aide d’une ficelle ou d’une bande de papier. Notons la longueur obtenue $P =$ …. .
Déterminons ensuite son diamètre $D =$ … $= 2R$.
On pourra estimer le nombre π, en calculant

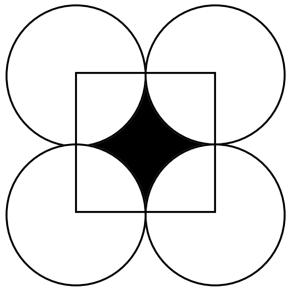
$$\frac{P}{2R} = \frac{P}{D} = \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ = \boxed{} \cong \pi$$

Exercice 1

Calcule le rayon du cercle qui aurait la même surface qu'un carré de côté égal à 2 mètres ?

Exercice 2

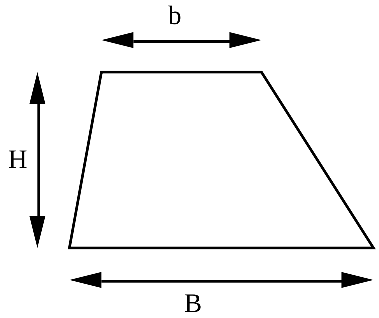
Le carré représenté ci-contre a des côtés égaux à 2 mètres. En chacun de ses 4 sommets, on dessine un cercle de rayon égal à 1 mètre.



Quelle est la surface de la figure hachurée ?

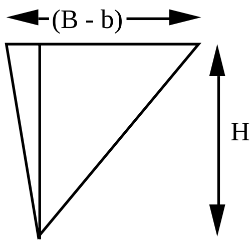
Exercice 3

Voici une figure appelée trapèze.



Nous notons :
B = la grande base;
b = la petite base;
H = la hauteur.

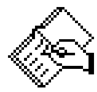
Peux-tu calculer sa surface ?



Indication :
par rapport au rectangle dans lequel il est inscrit, il manque un triangle comme celui-ci.

Afin de bien fixer les idées, il serait utile de remplir le tableau suivant, en réfléchissant à comment on "passe d'une figure à l'autre" et au sens particulier des symboles (B, H, C, L, l, D,d, R ...) utilisés.

Carré	S =
Rectangle	S =
Parallélogramme	S =
Losange	S =
Triangle	S =
Disque	S =



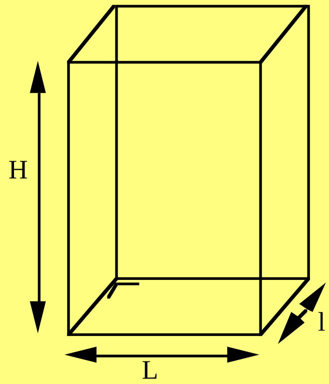
La formule
et
ce qu'elle signifie

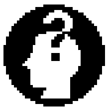
2. Volumes élémentaires

- Le premier volume qui nous intéressera est le **parallélépipède rectangle** (une boîte à base rectangulaire). Elle est représentée sur le dessin ci-contre. Sa base a une longueur *L*, une largeur *l*, et il possède une hauteur H.

  Son volume est

$$V = L \times l \times H$$
$$= (\text{Surface de la Base}) \times H$$

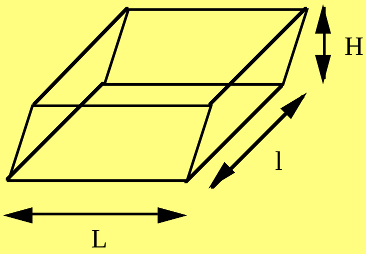




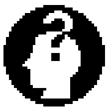
Comment calculer volume du parallélépipède

- Le **parallélépipède** peut être **oblique**; son volume est alors

$$V = L \times l \times H$$



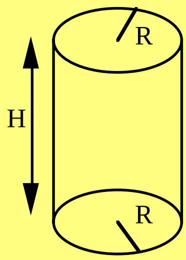
On remarquera l'analogie des formules avec celle de la surface du rectangle et du parallélogramme.



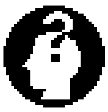
Comment calculer volume du cylindre

- La figure ci-contre est celle d'un **cylindre** droit; son volume est aussi donné par

$$V = (\text{Base}) \times H$$
$$= \pi \; R^2 H$$



Comment calculer volume de la sphère

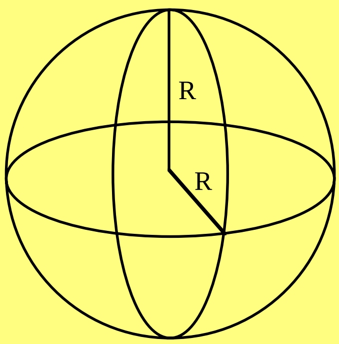


Comment calculer surface de la sphère

- Finalement, nous présentons la **sphère** de rayon *R*; son volume est

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

La surface de la sphère est $S = 4\pi R^2$



Exercice 4

Quel est le rapport entre le volume d'une sphère de rayon R et le volume du plus petit cylindre droit qui la contient ?

Exercice 5

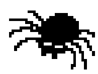
Que vaut la surface d'un cylindre ?

Nous avons remarqué :

- qu'une surface est toujours le produit de deux longueurs; si ces dernières sont exprimées en mètre (m) (ou en cm ...), la surface sera exprimée en mètre carré (m^2) (ou en cm^2 ...);
- que les volumes sont les produits de trois longueurs et sont dès lors exprimés en m^3 (ou en cm^3 ...).

Comparons la formule du volume et de la surface de la sphère.

Quelques remarques sur la connaissance des formules

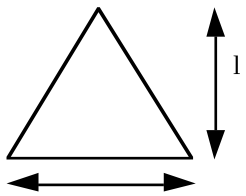


Retenir une formule sans son contexte est dangereux.

1) Il ne suffit pas généralement de retenir par exemple : $S = L \times l$ comme formule de surface (sans savoir à quoi elle correspond) .

Voici le danger :

Soit un triangle dont les dimensions sont : $L = 4$ cm
$l = 3$ cm



Une application trop rapide de la formule donnerait : $S = 12 \text{ cm}^2$!

Or, **la réponse correcte** est bien : $S = \dfrac{L \times l}{2} = 6 \text{ cm}^2$

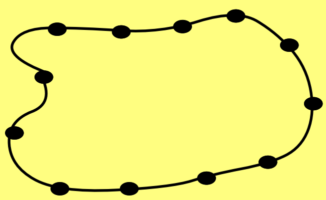
Il vaut mieux retenir en "extension" :

"La surface du triangle est le produit de sa base (*B*, *L*, ...) et de sa hauteur (*H*, *l*, ... peu importe, divisé par 2)".

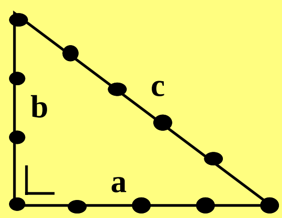
2) La plupart des formules rappelées ici (par exemple pour les surfaces) découlent les unes des autres ; il vaut mieux retenir cette démarche qui articule les formules plutôt que les formules individuelles, isolées.

3. Le théorème de Pythagore

Les bâtisseurs de cathédrale utilisaient pour leurs constructions une **corde fermée** à 12 noeuds séparés de la même distance (équidistants).



Sa particularité était la suivante :
si on la disposait comme indiqué ci-contre, elle formait un **triangle rectangle** (avec deux côtés perpendiculaires).



En supposant que les noeuds soient séparés de X cm, on trouve :

Séparation des noeuds X (cm)	a (cm)	b (cm)	c (cm)	a^2	b^2	c^2
1	4	3	5			
2	8	6	10	64	36	100
3	12	9	15			
5	20	15	25			
10	40	30	50			

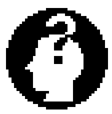
Complétons ce tableau, en inscrivant les carrés de a, b et c (c'est-à-dire $a \times a$, $b \times b$ et $c \times c$); nous trouvons pour la deuxième ligne, par exemple :

$$a^2 = 64; \quad b^2 = 36; \quad c^2 = 100$$

Du désordre apparent des valeurs de a, b et c, nous trouvons (pour toutes les lignes) que :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Le côté c, celui "en face" de l'angle droit, formé par les deux côtés perpendiculaires, est nommé **hypoténuse**. Le **théorème de Pythagore** s'énonce :



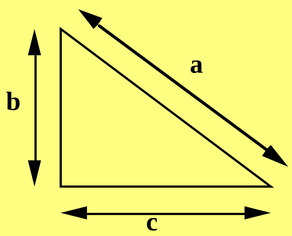
Comment calculer l'hypoténuse d'un triangle rectangle

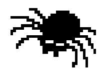
1) Le carré de l'hypoténuse (le côté en face de l'angle droit) est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.
2) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ **(la racine de** $a^2 + b^2$)

Suite à ce que nous avons dit à la page précédente, la deuxième formulation ("la formule seule") est dangereuse parfois à retenir "par coeur", comme l'illustre le problème ci-dessous :

Voici un triangle rectangle
c = 8 cm
b = 6 cm Que vaut a ?
La relation correcte à utiliser est ici :

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$$



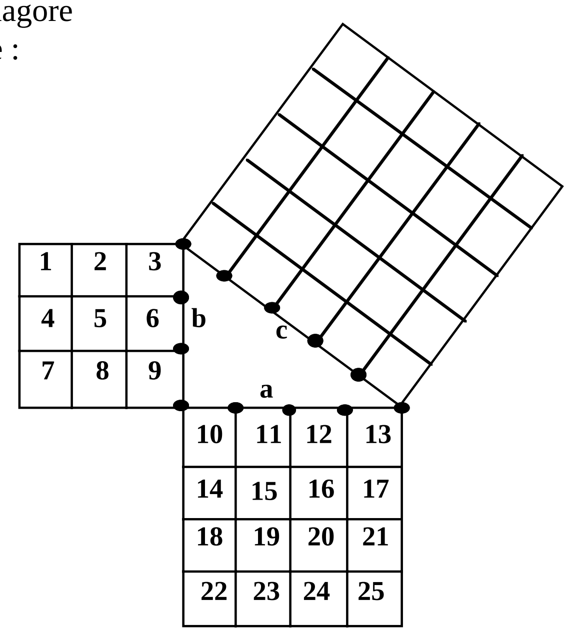


Du bon usage de la formule et de son contexte !

La formule du théorème de Pythagore possède l'interprétation suivante :

La surface du carré bâti sur l'hypoténuse est égale à la somme des surfaces des carrés bâtis sur les deux autres côtés.

La figure ci-contre illustre cette interprétation.

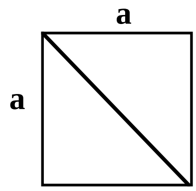


La longueur de l'hypoténuse est bien la racine carrée de la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit, dans la figure ci-dessus.

$$c = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$$

Exercice 6

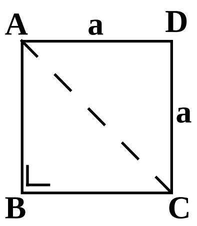
Calcule la longueur de la diagonale d'un carré de côté **a** ?

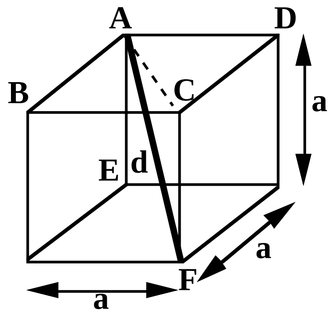


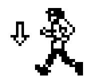
Application

Calculer la longueur de la diagonale d'un cube de côté **a** ?

1) Examinons tout d'abord la face supérieure du cube.
Il s'agit évidemment d'un **carré.**





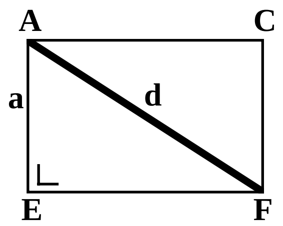


Distance entre deux points diagonale du cube

On obtient que la diagonale de ce carré vaut :

$$(AC)^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \rightarrow (AC) = \sqrt{2}\ a$$

2) Examinons ensuite la figure délimitée par A, E, F et C; elle possède deux côtés (AE) et (CF) égaux à l'arête du cube (a). Ses deux autres côtés sont égaux et valent la longueur de AC, c'est-à-dire $\sqrt{2}\ a$.



La diagonale du cube est en fait la diagonale de ce ... **rectangle**.
On obtient :

$$d^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2$$

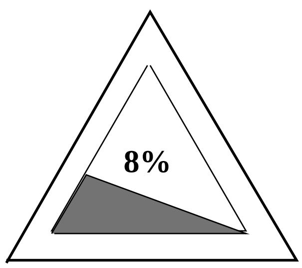
$$d = \sqrt{3}\ a$$

4. Le théorème de Thalès

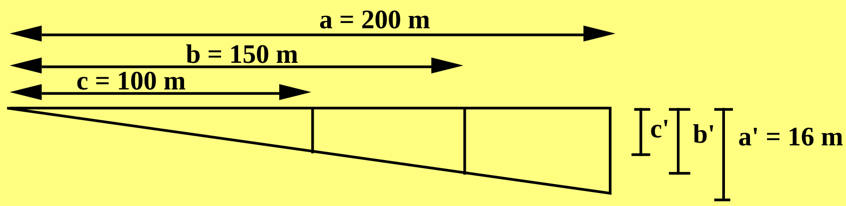
Nous avons remarqué la présence sur certaines routes escarpées du panneau suivant : il nous indique une pente de 8%.

Qu'est-ce que cela signifie ?

En avançant de 100 m, la dénivellation sera de 8 m; en avançant de 150 m, elle sera de 12 m, etc.

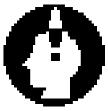


La figure ci-dessous illustre ce propos :

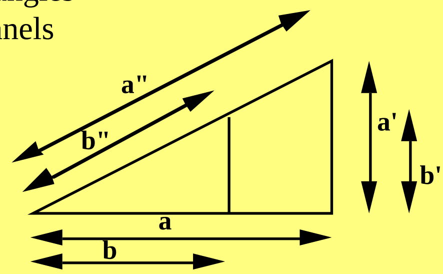


$$8\% = 0.08 = \frac{16}{200} = \frac{12}{150} = \frac{8}{100} \quad = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

Nous trouvons différents triangles rectangles emboîtés dont les côtés sont proportionnels entre eux.

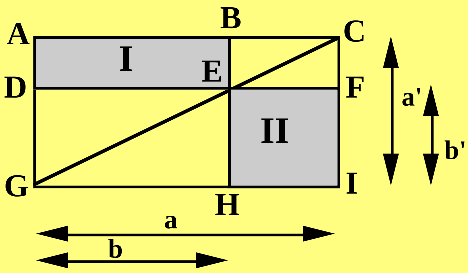

Théorème de Thalès

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$



Un raisonnement analogue conduit à la relation : a''/a = b''/b que l'on lira : (a'') est à (a) comme (b'') est à (b).

La relation a'/a = b'/b peut se réécrire
a'b = b'a ce qui signifie :
la surface du rectangle (ABHG)
est égale à la surface
du rectangle (DFIG).



Ceci est vrai si les surfaces I et II sont égales, comme nous allons le montrer ci-après.

Application

Montrons que les deux surfaces hachurées (I) et (II) sont égales :

Surface I	=	Surface II
b × (a'-b')	=	b'× (a-b)
ba' - bb'	=	b'a - b'b

donc l'égalité est vraie si ba' = b'a

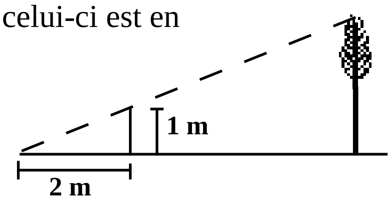
Et ba' = ab' par le théorème de Thalès (b/b' = a/a').

Ceci est vrai pour tous les rectangles pour lesquels "le point de contact" (E) se trouve sur la diagonale du rectangle qui les entourent.

Exercice 7

Nous souhaitons mesurer la hauteur d’un arbre.
Pour le faire, nous plaçons un pieu de 1 m de haut à 10 m de son tronc.
En visant à 2 m de ce pieu, le sommet de celui-ci est en alignement avec le sommet de l’arbre.

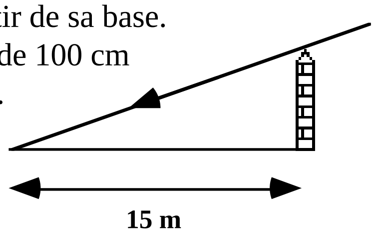
Que vaut la hauteur de l’arbre ?



Exercice 8

Un clocher a une ombre de 15 m mesurée à partir de sa base.
Un bâton fiché dans le sol et ayant une hauteur de 100 cm possède au même moment une ombre de 75 cm.

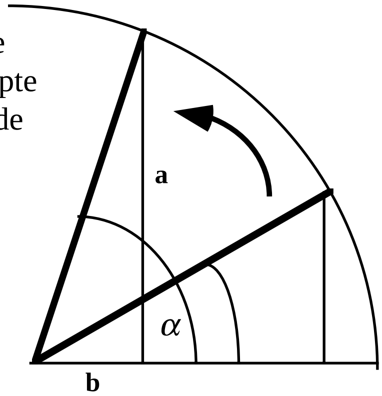
Quelle est la hauteur du clocher ?

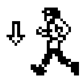


On le sent intuitivement, les rapports exprimés dans le théorème de Thalès sont en quelque sorte une «mesure» de l'angle du triangle rectangle.
Nous pourrions dire dans le premier exemple en haut de la page I.8 que l'angle est de 0,08. Des problèmes surgiront alors pour parler de l'angle droit.

En effet, en définissant l'angle (noté α, la lettre grecque α) par le rapport (a/b), on se rend compte que l'angle droit est obtenu lorsque b devient de plus en plus petit pour devenir nul.

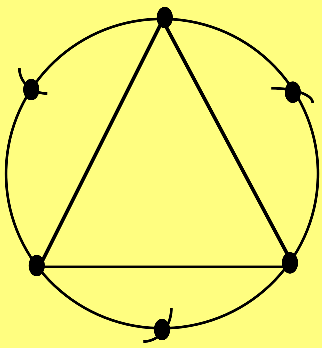
Plus loin, nous verrons que le rapport (a/b) est appelé "tangente de l'angle α".
Elle est infinie pour un angle de 90°.



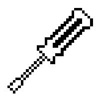


Les fonctions trigonométriques

5. Constructions de polygones

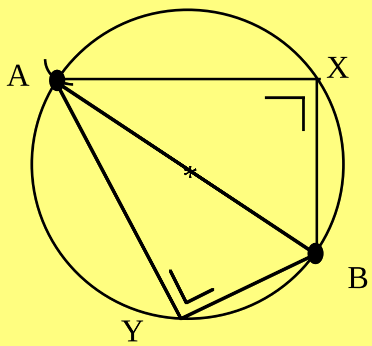


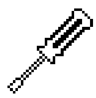
Un polygone est une surface limitée par des droites. Nous avons déjà vu précédemment comment construire un **hexagone**.
En reliant un point sur deux, on obtient le **triangle équilatéral :** ses trois côtés sont égaux.



Construire un triangle équilatéral

Nous montrerons plus loin que l'angle formé par les deux segments reliant un point quelconque (X,Y, …) d'un cercle aux extrémités de l'un de ses diamètres est droit. Les angles A $\hat{X}$ B et A $\hat{Y}$ B sont droits. Les triangles A X B et A Y B sont donc des **triangles rectangles.**





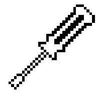
Construire un triangle rectangle

Exercice 9

Si le rayon du cercle de la figure précédente est R, que valent les côtés du triangle équilatéral inscrit ?

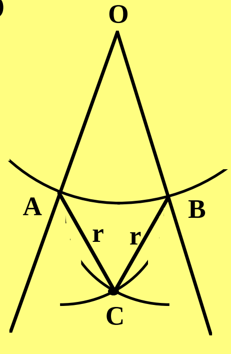
(Indication : dessiner un diamètre, penser que le côté d'un hexagone est R).

6. Bissectrice d'un angle et médiatrice d'un segment



Bissectrice d'un angle

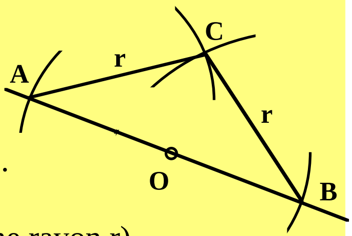
A. La figure ci-contre «montre» un angle. Notre propos est de le couper en deux par une ligne passant par le sommet O (la bissectrice).



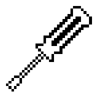
. Posons la pointe sèche du compas en O et traçons un segment du cercle.
. Marquons les points A et B (le triangle A O B est isocèle car OA = OB).
. Des points A et B dessinons des arcs de cercle de même rayon quelconque (r).
Le segment OC coupe l'angle en deux angles égaux.

Construire un triangle isocèle

B. Un morceau de droite passant par les points A et B est présenté ci-dessous. Nous souhaitons tout d'abord en dessiner une perpendiculaire passant par le point O.

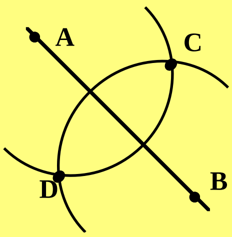


. Avec le point O comme centre, dessinons deux arcs de cercle. Nous obtenons les points A et B (O est donc le milieu du segment AB).
. Après avoir élargi légèrement le compas, dessinons deux arcs de centre A et B (de même rayon r).
. La droite passant par O et C est perpendiculaire à la première droite.



Médiatrice d'un segment

C. Voici un segment AB. Nous souhaitons dessiner une perpendiculaire à celui-ci passant par son centre (la médiatrice).



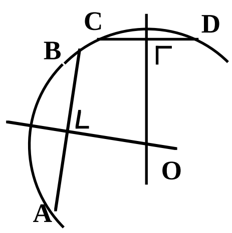
. En prenant les points A et B pour centres, dessinons de "grands" arcs de cercle (de rayon légèrement supérieur à la moitié de AB).
. En reliant les points C et D obtenus, on obtient la médiatrice souhaitée (et le milieu de AB).

Remarque : Il est évident que les opérations (A) et (C) peuvent se répéter. On peut ainsi diviser un angle ou un segment, en quatre, en huit, ...

Application

On recherche le rayon de l'arc de cercle ci-contre.

1. Tracer deux segments quelconques (AB et CD).
2. Dessiner les médiatrices de ces deux segments.
3. Elles se coupent au point O.



Les distances OA, OB, OC, OD sont des estimations du rayon du cercle. Cela peut être vérifié en redessinant le cercle total.

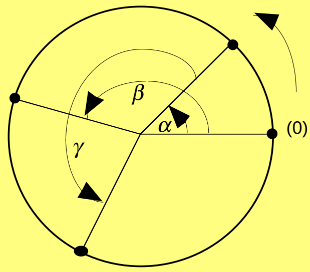
B. Trigonométrie

Ce mot d'origine grecque signifie mesure *(metron)* du triangle *(trigônos)*. Un des premiers problèmes qui survient est comment mesurer les angles, ensuite, les liaisons entre les angles d'un triangle et finalement entre ceux-ci et les côtés.

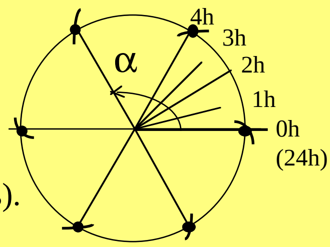
1. Cercle trigonométrique et mesure des angles

Le cercle est facilement divisible en six, la construction de l'hexagone nous l'a montré. Les multiples de six sont facilement accessibles également.

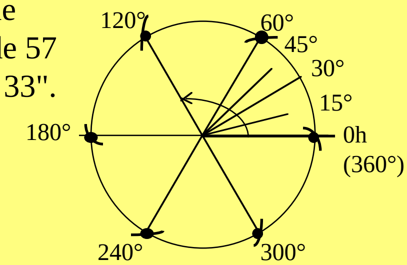
L'idée du cercle trigonométrique est la suivante : un point se déplace (dans le sens opposé des aiguilles d'une montre) à partir d'une position donnée (O). Les angles sont mesurés à partir de cette position de référence; nous noterons souvent les angles par les lettres grecques alpha (α), beta (β) et gamma (γ).

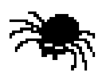


La Terre tourne sur elle-même (elle fait un tour complet en 24 heures). Quoi de plus naturel que de mesurer les angles en heures (h), chaque heure en 60 minutes (min), chaque minute en 60 secondes (s). Cela correspond en quelque sorte aux fuseaux horaires.
- L'angle α est donc d'environ 8 heures.
- Un tour complet est de
  24 h x 60 min/h x 60 s/min = 86 400 s (secondes).
- L'angle droit est de 6 heures.



Cependant, la méthode la plus répandue est la décomposition du cercle en 360 degrés, chaque degré en 60 minutes, chaque minute en 60 secondes. On note un angle de 57 degrés 17 minutes et 33 secondes : 57° 17' 33".
- L'angle α est donc de 120°.
- Un tour complet est de 360° x 60' x 60"
  = 1 296 000".
- L'angle droit est donc de 90°.





Attention à la différence entre :
seconde de temps (s)
seconde d'angle (")

Une troisième méthode s'inspire de la circonférence du cercle; le périmètre d'un disque de rayon R est $2\pi R$, celui d'un demi-disque πR, celui d'un quart de cercle ($\pi R / 2$).
L'angle sera exprimé par le rapport entre l'arc et le rayon et en **radian**.

Ainsi, nous pourrons établir la table suivante :

L'angle exprimé en radian est un nombre pur (sans unité); en effet, il résulte de la division d'une longueur (le périmètre) par une autre longueur (le rayon).

Angle (degré)	Angle (radian)
360°	2π
180°	π
90°	$\pi/2$
60°	$\pi/3$
45°	$\pi/4$
30°	$\pi/6$

Application

Que vaut un radian exprimé en degrés, minutes ?

$$1 \text{ tour} = 360° = 2\pi \quad [\text{radian}]$$

$$360°/\,2\pi = 1 \quad [\text{radian}]$$

$$57,29° \cong 1\ [\text{radian}]$$

$$57° + \left(\frac{29}{100} \text{ de degré}\right) \cong 1\ [\text{radian}]$$

$$57° + \left(\frac{29}{100} \text{ de } 60 \text{ minutes}\right) \cong 1\ [\text{radian}]$$

$$57°\ 17' \cong 1\ [\text{radian}]$$

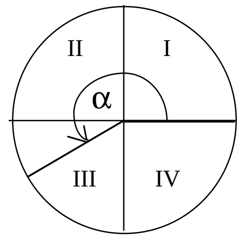
Attention
0,29°n'égale pas 29'

Remarques

- Une seconde temps (s) est 15 fois plus grande qu'une seconde d'angle (") : 1s = 15". Ceci est important en astronomie où les angles sont souvent mesurés en h, min, s.

- L'angle de 270° est souvent noté -90°; un angle de 240° peut être noté - 120°.

- Le cercle est souvent divisé en 4 quadrants : On les désigne par les chiffres romains correspondants. Un angle α du quadrant III ou IV est souvent désigné par - (360° - α).

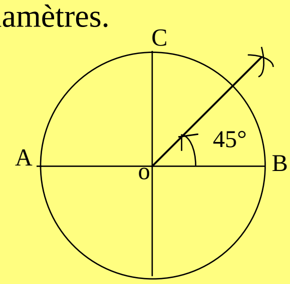


2. Constructions d'angles "remarquables"

Construire
des angles

On peut construire une grande variété d'angles à l'aide d'un rapporteur. Nous allons voir ci-dessous comment construire quelques angles usuels pour la géométrie à l'aide du compas.

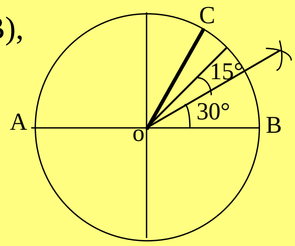
Partons du cercle trigonométrique et d'un de ses diamètres.
- La médiatrice du segment AB fournit l'angle de 90°.
- La bissectrice de cet angle nous donne l'angle de 45° (un angle de 135° peut aussi être construit dans le deuxième quadrant).



Médiatrice

Bissectrice

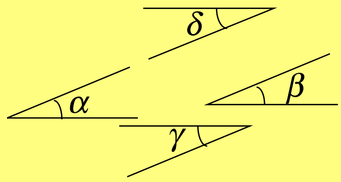
- A partir du point B, commencons à dessiner un hexagone, nous obtenons les angles de 60° ($C\hat{O}B$), 120°, 180°, etc.
- Dessinons la bissectrice de l'angle $C\hat{O}B$, nous obtenons l'angle de 30°.
- Nous remarquons aussi l'angle de 15° (entre 30° et 45°).



3. Propriétés et comparaisons d’angles

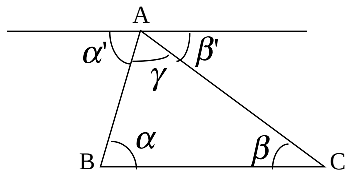
a) Les angles à côtés parallèles sont égaux.

$\alpha = \beta = \gamma = \delta$



Application

Le triangle ci-dessous est quelconque.
Dessinons une droite passant par A et parallèle à sa base BC.



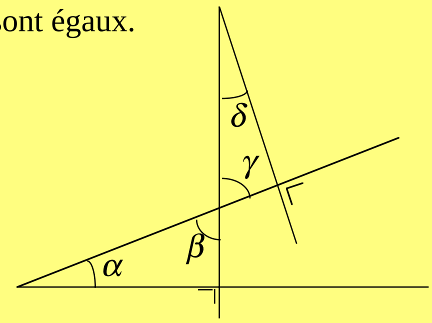
On remarque que: $\beta' = \beta$
$\alpha' = \alpha$

Or $\alpha' + \gamma + \beta' = 180°$

Donc $\alpha + \gamma + \beta = 180°$

La somme des trois angles internes d’un triangle vaut 180°.

b) Les angles à côtés perpendiculaires sont égaux.



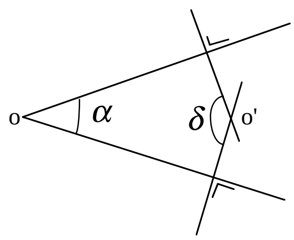
En voici une représentation.
Nous avons :
$\alpha + \beta = 90°$
$\gamma + \delta = 90°$
et $\beta = \gamma$ (par construction)
donc : $\alpha = 90° - \beta$
$\delta = 90° - \gamma$
Puisque β et γ sont égaux, α et δ sont égaux.
Les angles à côté perpendiculaires sont égaux.

Angles supplémentaires

Fais cet exercice pour toi.

Voici un autre cas intéressant :

Montrer que dans ce cas $\alpha + \delta = 180°$
(α et δ sont supplémentaires)
- on trace la ligne 00’;
- on obtient deux triangles rectangles.



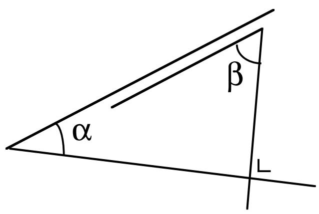
On généralise de la façon suivante :

les angles à côtés perpendiculaires sont donc égaux ou supplémentaires.

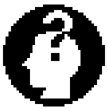
Exercice 10

Voici deux angles α et β ayant deux de leurs côtés parallèles et les deux autres perpendiculaires.

Trouve une relation entre α et β.

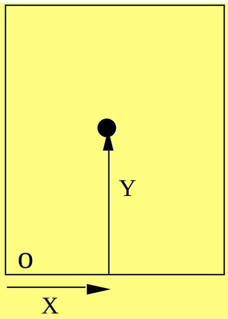


4. Repère et position d'un point dans le plan

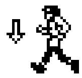


Comment positionner un point du plan.

Voici une feuille de papier présentant une tache. Nous souhaiterions la localiser (dire où elle se trouve).
Une première chose à faire est de se fixer une origine (o) pour répondre à la question «par rapport à quoi».
Prenons le coin inférieur gauche comme origine.

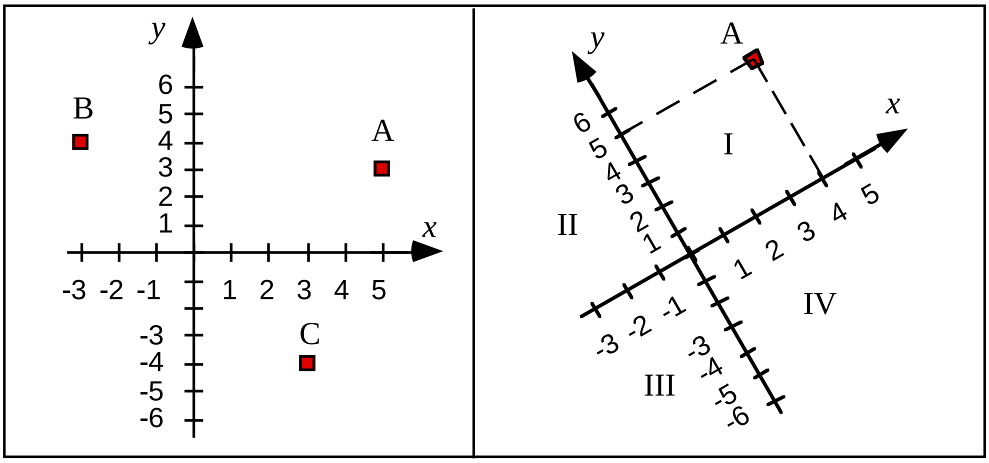


1) <u>Les coordonnées cartésiennes</u>



Composantes d'un vecteur

Pour atteindre la tache à partir du point o, nous dirons qu'il faut se déplacer de X (cm) vers la droite et ensuite de Y (cm) vers le haut. La position de la tache sera définie par ses **coordonnées** que nous noterons (X, Y).
Pour le faire, nous avons choisi deux directions orthogonales privilégiées (ici horizontale et verticale) et un système de mesure (l'unité cm).
D'autres choix sont possibles comme l'illustrent les figures ci-dessous.



A **:** (5,3)
B **:** (-3,4)
C **:** (3, -4)

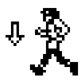
A **:** (4,5)

Les composantes X et Y prennent des signes différents selon les quadrants auxquels le point appartient.

	Quadr I	Quadr II	Quadr III	Quadr IV
X	+	-	-	+
Y	+	+	-	-

La composante X (souvent horizontale) est nommée **abscisse;**
la composante Y (souvent verticale) **ordonnée.**

2) <u>Les coordonnées polaires</u>



Composantes d'un vecteur

Pour viser la tache, nous nous tournons d'abord d'un angle θ (theta) et ensuite pour l'atteindre, nous avançons d'une longueur r (le rayon).

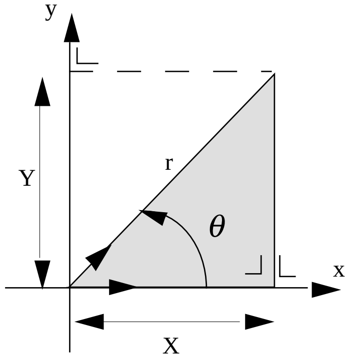
Une liaison existe entre les coordonnées cartésiennes (X, Y) et les coordonnées polaires (r, θ).

Relations entre
systèmes de coordonnées
(X,Y) <=>(r,θ)

En l’occurrence :

$$r^2 = X^2 + Y^2$$

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

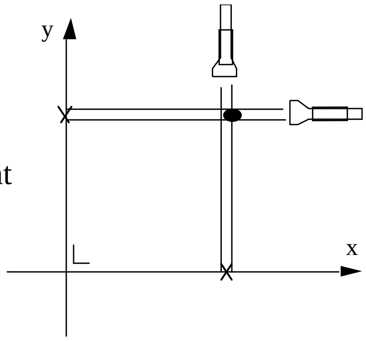


Distance d'un point
à l'origine

Remarques :

- L’angle varie, en fonction des quadrants, entre 0 et 360°. Le rayon est toujours positif.

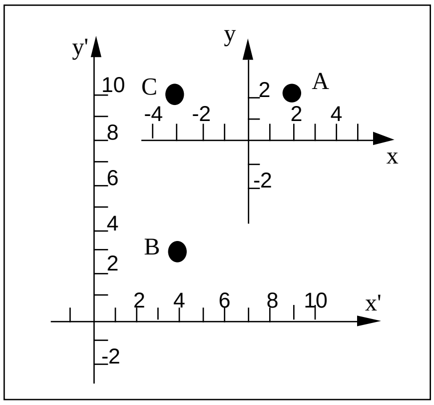
- Les coordonnées *X* et *Y* sont parfois appelées «projections orthogonales» du point sur les axes ; il s’agit aussi des ombres laissées sur les axes perpendiculaires.



Exercice 11

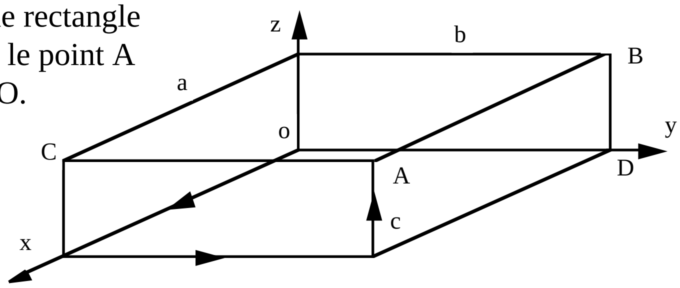
Evalue les composantes cartésiennes des points montrés, dans les systèmes d’axes indiqués.

	X	Y	X'	Y'
A				
B				
C				



5. Repère et position d’un point dans l’espace

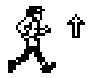
Voici un parallélipipède rectangle
Tentons de positionner le point A
par rapport à l’origine O.



Les trois axes (orthogonaux) montrés sont : x : d'arrière vers l'avant;
y : de droite à gauche;
z : de bas en haut.

Pour atteindre le point A, nous allons parcourir :
- une distance a suivant x;
- une distance b suivant y;
- une distance c suivant z.

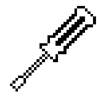
Le point A s'écrira A **:** (a, b, c).
Les autres points B **:** (o, b, c);
C **:** (a, o, c);
D **:** (o,b, o)
etc.



Diagonale d'un cube.

Par un raisonnement analogue à celui que nous avons suivi pour calculer la diagonale d'un cube de coté a, on peut montrer que la distance d'un point à l'origine est

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$



Distance d'un point à l'origine. Diagonale du cube.

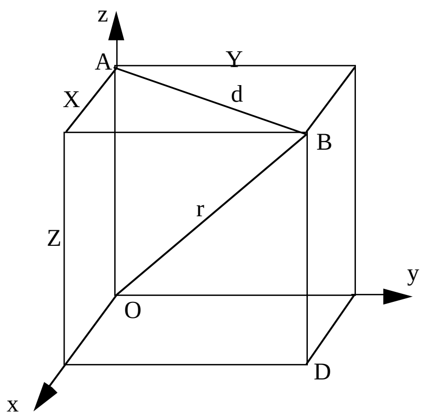
Exercice 12

Démontre la formule ci-dessus.

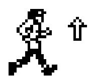
Indication

1) Montre que $d^2 = X^2 + Y^2$

2) Calcule r dans la figure OABD



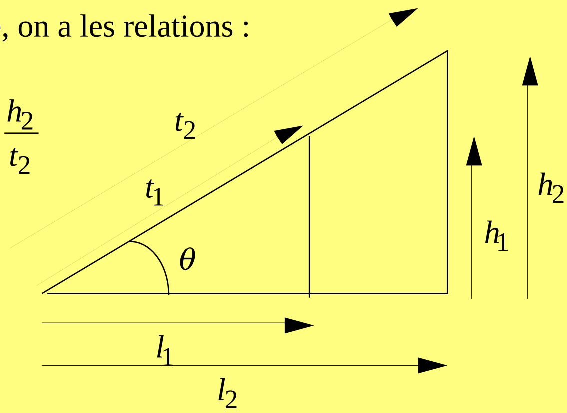
6. Les fonctions trigonométriques



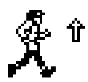
Théorème de Thalès.

Suite à ce que nous avons vu à propos du théorème de Thalès, le moment est venu de relier l'angle (θ par exemple) aux côtés, aux rapports des côtés du triangle.
Pour un angle à la base θ donné, on a les relations :

$$\frac{l_1}{h_1} = \frac{l_2}{h_2} \quad \text{et} \quad \frac{l_1}{t_1} = \frac{l_2}{t_2} \quad \text{et} \quad \frac{h_1}{t_1} = \frac{h_2}{t_2}$$

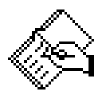


1) <u>Constructions des fonctions trigonométriques</u>



Construire des angles.

Donnons-nous pour commencer un cercle de 5 cm de rayon et construisons-y les angles de 30°, 45°, 60°.

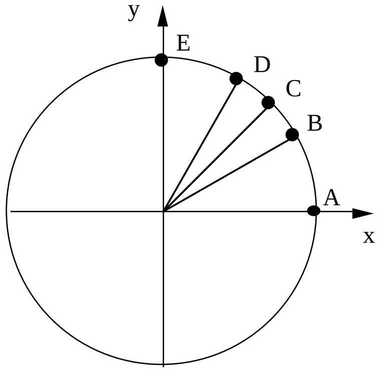


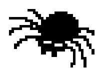
A faire au cahier.

Ceci peut aussi être fait avec un rapporteur pour d'autres angles.
Nous obtenons 3 points B, C, D; nous avons aussi marqué les points A (0°) et E (90°).

Construisons le tableau des abscisses et des ordonnées de ces points :

	Abscisse (cm)	Ordonnée (cm)	θ
A	5	0	0°
B	4,35	2,50	30°
C	3,55	3,55	45°
D	2,50	4,35	60°
E	0	5	90°



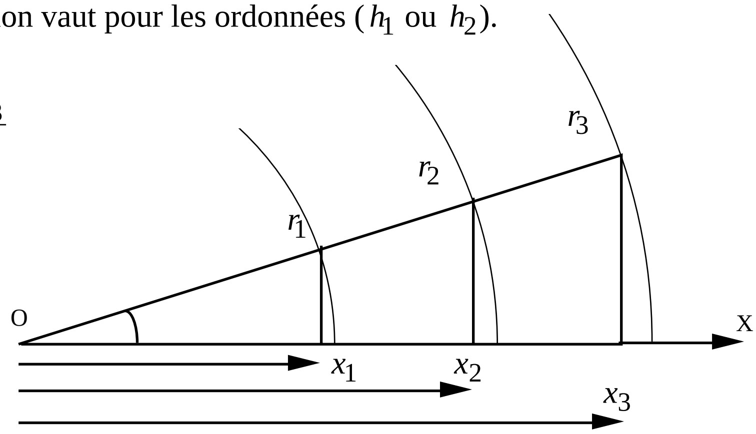


Ce dessin n'est pas à l'échelle.
Refais-le au cahier et … mesure

Les chiffres présentent hélas un très faible caractère de généralisabilité. Si on avait pris un rayon de 15 cm, on aurait obtenu une abscisse du point D (60°) égale à 3 × 2,5 cm.
Mais le théorème de Thalès nous dit que le **rapport** de cette abscisse (l_1 ou l_2) au rayon du cercle (t_1 ou t_2) est le même, quel que soit le rayon du cercle et la même considération vaut pour les ordonnées (h_1 ou h_2).

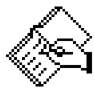
$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2} = \frac{x_3}{r_3}$$

et $\frac{x}{r} \leq 1$

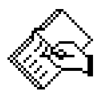


Le rapport (*x/r*) est donc invariable pour un angle θ donné.
Ce rapport sera appelé **cosinus** de l'angle θ et noté cos θ
Cette valeur est comprise entre -1 et 1 $\left(-1 \leq \cos\theta \leq 1\right)$.

Le rapport (*y/r*) est lui aussi invariable.
Ce rapport sera appelé **sinus** de l'angle θ et noté $\sin\theta$
Nous avons aussi $\left(-1 \leq \sin\theta \leq 1\right)$.



COSINUS



SINUS

Etablissons notre table des cos θ et des sin θ :

θ	cos θ	sin θ
0°	1	0
30°	0,87	0,50
45°	0,71	0,71
60°	0,50	0,87
90°	0	1

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

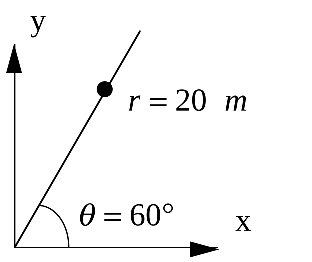
2) Calcul des fonctions trigonométriques

Exercice 13

Vérifie ces valeurs avec une calculatrice (généralement touches COS et SIN).

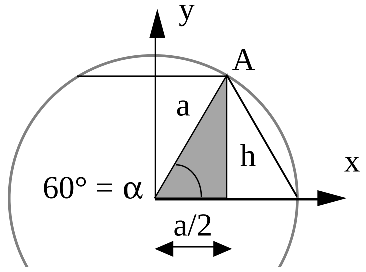
Application

a) Calculer l'abscisse et l'ordonnée d'un point situé à 20 m d'un observateur et vu sous un angle de 60°.



$$
\begin{aligned}
x = r \;\; \cos\theta \;\; &= \;\; 20 \times \cos(60°) \\
&= \;\; 20 \times 0{,}5 \;\; = \;\; 10 \;\; m \\
y = r \;\; \sin\theta \;\; &= \;\; 20 \times \sin(60°) \\
&= \;\; 20 \times 0{,}87 \;\; = \;\; 17{,}4 \;\; m
\end{aligned}
$$

b) Considérons le triangle équilatéral ci-contre. Ses côtés sont notés a et sont égaux. Les trois angles étant aussi égaux et la somme des angles d'un triangle étant égale à 180°, on a α = 60°.



Le sinus de 60° est l'ordonnée du point A (ici h) divisée par le rayon du cercle (le côté du triangle, a). Or, d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle ombré, on a :

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \;\; \Rightarrow \;\; h^2 = \frac{3}{4}a^2 \;\; \Rightarrow \;\; h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

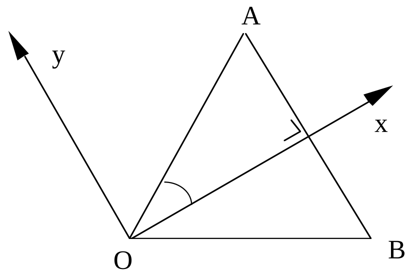
comme $\sin(60°) \; = \; \dfrac{h}{a} \;\; \Rightarrow \;\; \sin(60°) \; = \; \dfrac{\sqrt{3} \;\; a}{2 \;\; a} \; = \; \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 14

Montre dans la figure ci-contre

que le sin (30°) = $\dfrac{1}{2}$

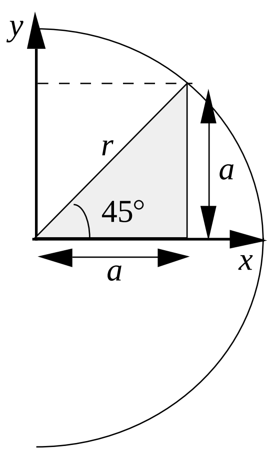
(le triangle OAB est équilatéral).



Application

Calculons le sin (45°).

Le cercle ci-contre a un rayon noté *r*.
Notons *r* sin (45°) = *a*.
L'autre côté du triangle rectangle ombré vaut aussi *a*.



On a donc :

$$a^2 + a^2 = r^2$$

$$r^2 \sin^2(45°) + r^2 \sin^2(45°) = r^2$$

$$2\sin^2(45°) = 1$$

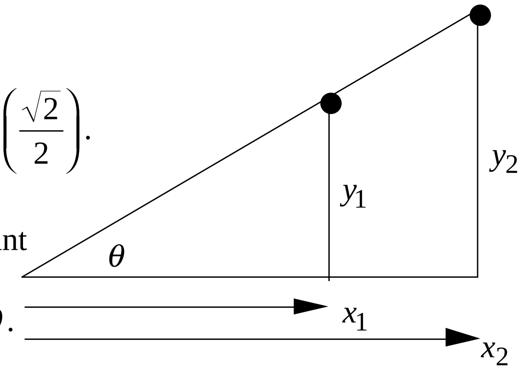
$$\sin^2(45°) = \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

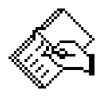
Donc $\sin(45°) \; = \; \dfrac{1}{\sqrt{2}} \; = \; \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

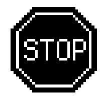
Exercice 15

Montre que le cos (45°) vaut aussi $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Le rapport (y/x) qui est aussi constant pour une angle donné est nommé **tangente** de l'angle θ et noté tan θ.

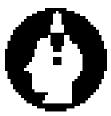



TANGENTE



Réalise un tableau des valeurs des fonctions trigonométriques d'angles particuliers rencontrés jusqu'ici.

7. Relations particulières entre les angles


Relations entre systèmes de coordonnées (X,Y) <=>(r,θ)

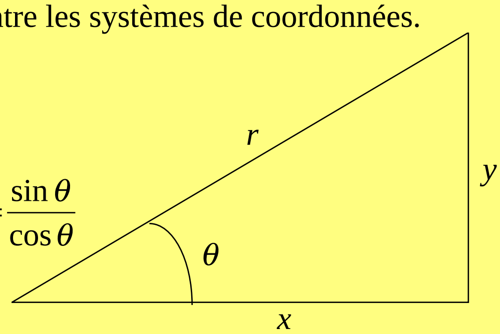
Nous avons les liaisons complètes entre les systèmes de coordonnées.

$x/r = \cos\ \theta$

$y/r = \sin\ \theta$

$y/x = \tan\ \theta$

$$\frac{y}{x} = \frac{r\ \sin\theta}{r\ \cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

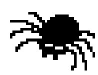


Le rapport de la fonction **sinus** (d'un angle donné) à la fonction **cosinus** (du même angle) fournit la **tangente** de cet angle.

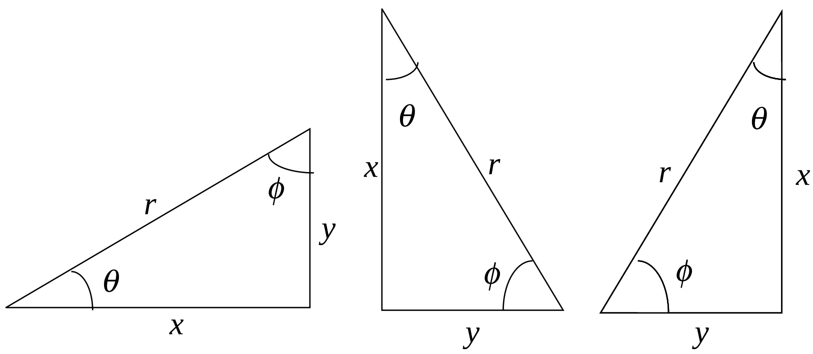
$$r^2 = x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$$

$$r^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \Rightarrow \boxed{1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

Cette dernière expression peut être considérée comme une nouvelle expression du théorème de Pythagore.


Des formules, oui mais surtout :
- ce qu'elles signifient;
- ce qu'elles représentent.

Dans la foulée de ce que nous avons dit tout au début de ce chapitre, nous allons de nouveau montrer qu'il faut se méfier de retenir par coeur des formules du type $x = r\cos\theta$ sans retenir en même temps leur sens et leur contexte.



$\cos\theta = x/r$ $\quad\quad$ $\cos\phi = y/r$ (ϕ se dit phi)

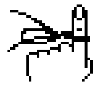
$\sin\theta = y/r$ $\quad\quad$ $\sin\phi = x/r$

$\tan\theta = y/r$ $\quad\quad$ $\tan\phi = x/y$

Toutes ces formules sont justes. Comment ne pas s'y embrouiller ?

Quel est leur sens commun ?

De nouveau, il vaut mieux retenir le sens de la formule, son contexte. Nous dirons par exemple :


A retenir en appliquant ces définitions sur les figures de la page précédente.

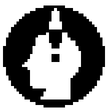
Dans les triangles **rectangles** :

- le **sinus d'un angle** est le **rapport** entre le côté opposé (celui qui fait «face» à l'angle) et l'hypoténuse;
- le **cosinus d'un angle** est le **rapport** entre le côté adjacent (celui qui forme l'angle mais pas l'hypoténuse) et l'hypoténuse;
- la **tangente d'un angle** est le **rapport** entre le côté opposé et le côté adjacent

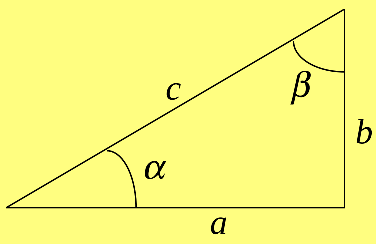
Exercice 16

On dispose d'une planche de 2 m. On demande la hauteur de la cale nécessaire pour avoir un angle de 10° au bas du plan incliné ainsi formé.
(Ces considérations seront utiles quand nous verrons le plan incliné).

1) <u>Les angles complémentaires</u>


Angles complémentaires

α et β sont complémentaires si leur somme égale 90° (par exemple les deux angles non droits d'un triangle rectangle).



On a

$$\cos\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{c}$$

$$\sin\beta = \frac{a}{c}$$

$$\beta = 90° - \alpha$$

Si α et β sont complémentaires
sin α = cos β et sin β = cos α

On pourrait aller revoir comment se comparent les sinus et cosinus de 30° et 60°.

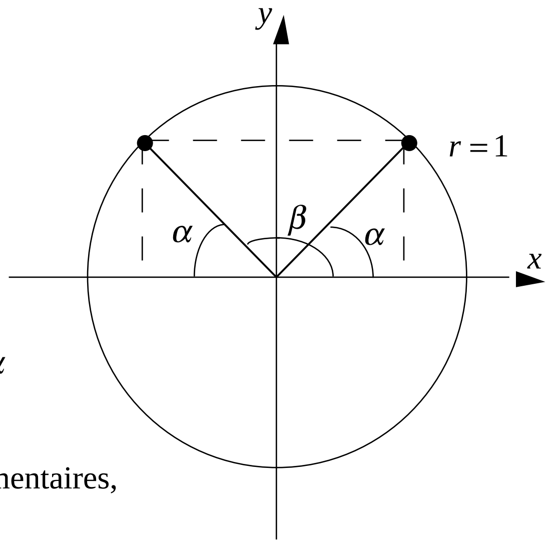
2) <u>Les angles des quadrants II, III et IV</u>

- Les formules précédemment vues $x = r \cos\theta$ et $y = r \sin\theta$
  nous disent aussi que :
  - cos θ est l'**abscisse** d'un point situé à un angle θ et se trouvant sur un cercle de rayon = 1 (r=1);
  - sin θ en est son **ordonnée.**

On voit sur la figure ci-contre que

$\sin\beta = \sin\alpha$
$\cos\beta = -\cos\alpha$

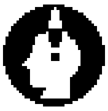
or $\beta = 180° - \alpha$



On obtient donc les relations

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

Les angles α et β sont dits supplémentaires, leur somme $(\alpha + \beta)$ vaut 180°.


Angles supplémentaires

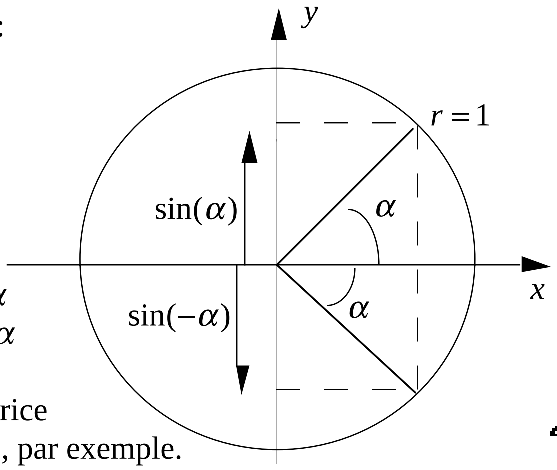
- Voici un autre cas intéressant (angles opposés des quadrants I et IV)

  Nous obtenons dans ce cas :

  $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
  $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

  On peut les écrire aussi :

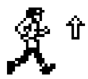
  $\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$
  $\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$



Tu pourrais comparer à la calculatrice
le sinus de 320° avec celui de 40°, par exemple.

Exercice 17

Voici un tableau reprenant les valeurs particulières vues précédemment :


Construction et calcul de fonctions trigonométriques.

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$
0°	1	0
30°	$\sqrt{3}/2$	1/2
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60°	1/2	$\sqrt{3}/2$
90°	0	1

A l'aide de cette table, calcule (à l'aide des relations ci-dessus : angles complémentaires, supplémentaires …) :

sin (120°) =
cos (150°) =
tan (135°) =
sin (300°) =
tan (330°) =

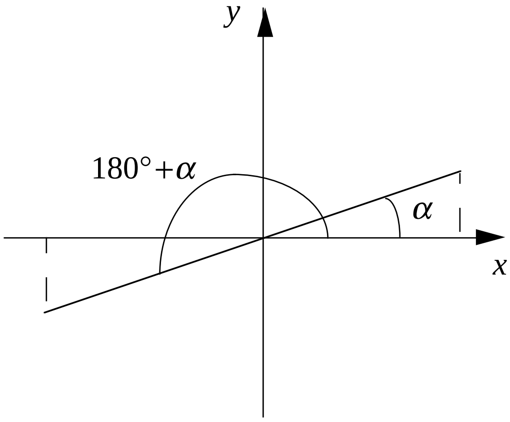
Exercice 18

Détermine le signe :

sin (180° +α) = ☐ sin α

cos (180° +α) = ☐ cos α

(Remplir la case avec + ou -).

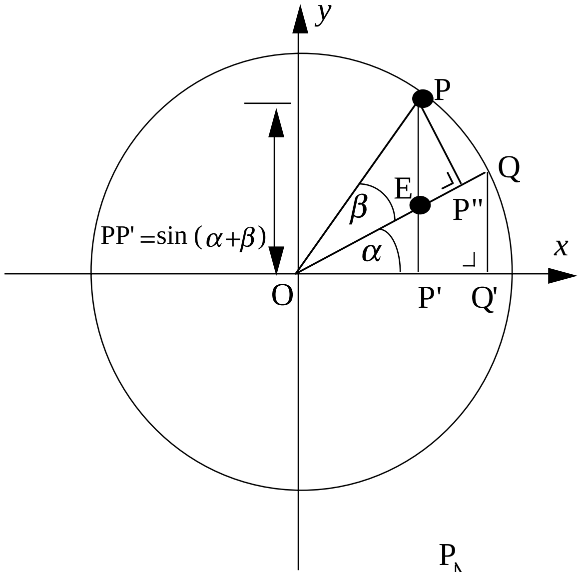


3) <u>Composition des angles - Addition et soustraction</u>

Le cercle ci-contre a un rayon r = 1.
On a représenté un angle α, «suivi» d'un angle β.
Le point a donc les coordonnées polaires suivantes :

P (1, α+β)

Notre propos est de calculer le sin(α + β) en termes des angles α et β.



sin(α + β)=PP'
Mais que vaut PP' ?

On remarque sur la figure :

PP"= sin β

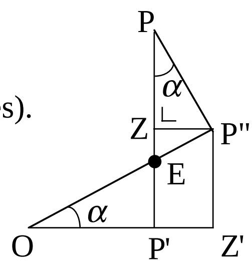
QQ' = sin α

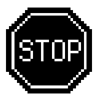
En outre :

OP" = cos β

OQ' = cos α

L'angle $\widehat{EPP''}$ vaut α (angles à côtés perpendiculaires).





Refais ce dessin en grand

1- **Traçons la hauteur P"Z**

PZ = PP" cos α

= sin β cos α

(On observe le triangle rectangle PZP")

2- **Descendons perpendiculairement le point P" sur l'axe x**, on obtient le point Z'. Dans le triangle rectangle OP"Z', nous avons :

P"Z' = OP" sin α

= cos β sin α

= ZP'

3- Or PP' = sin (α+β)

= PZ + ZP'

= sin β cos α + cos β sin α

PP' = PZ+ZP'

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}$$

Voici une première démonstration, elle est difficile.

Pour pouvoir la reproduire, il faudrait :

1) La lire attentivement en comprenant ce qui est fait et en dégageant les temps forts : les constructions successives, l'étape (a), l'étape (b) ….

2) «La faire fonctionner dans sa tête». Si on bloque quelque part, reprendre le point **1)** à l'endroit où on a bloqué et repasser au point **2)** jusqu'au moment où on arrive au bout.

3) La refaire au cahier pour soi, avec d'autres notations (d'autres lettres); ce n'est pas cela qui est important. Si on bloque, reprendre le livre et essayer de continuer ensuite.

4) Essayer de la refaire une ou deux semaines plus tard.

La relation qui fournit sin $(\alpha-\beta)$ = sin $(\alpha+(-\beta))$ s'obtient en substituant β par $(-\beta)$; on a donc sin $(\alpha-\beta)$ = sin α . cos $(-\beta)$ + sin $(-\beta)$. cos α
A l'aide des relations que nous avons vues entre les angles de différents quadrants, on obtient :

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta - \sin\beta\ \cos\alpha}$$

En travaillant sur la figure donnée à la page précédente, on obtient
cos $(\alpha+\beta)$ = OP'.

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\end{array}}$$

Autres relations

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(2\alpha) = \sin(\alpha+\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\end{array}}$$

Exercice 19

- Donne l'expression de sin $(3\,\alpha)$?

Exercice 20

- Vérifie numériquement que sin (60°) = 2 sin (30°) . cos (30°) ?

- Calcule sin(45°) à partir de sin (90°)

Exercice 21

Remplis le tableau suivant :

Angle θ (Radian)	sin θ	cos θ	tan θ
2π			
π			
$\pi/2$			
$\pi/3$			
$\pi/4$			

Exercice 22

A quelle distance d devrait-on se placer pour observer un crayon de 17 cm sous un angle de :

1 minute d'angle : d = $\boxed{}$ km
1 minute de temps : d = $\boxed{}$ km

Indications

- 1 minute d'angle est (1/60) degré
- 1 minute de temps est 15 fois plus grande (pp. I.11-12)

Outre les angles particuliers que nous avons analysés, le calcul des fonctions trigonométriques des angles quelconques nécessite une calculette scientifique.

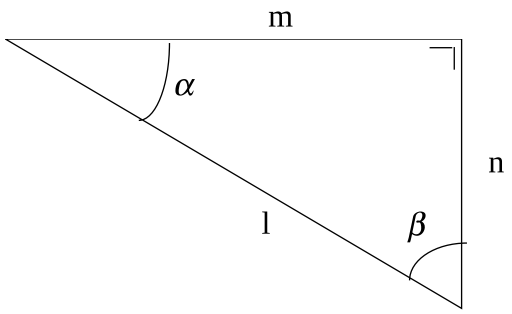
. Avant de l'utiliser, il est important de vérifier son mode (en degré, en radian ?) et en général de **consulter son mode d'emploi**.

. Les calculettes utilisent souvent un mode décimal; ainsi 30°,25 signifie 30° 1/4, donc 30°15'.

C. Les triangles

1. Le triangle rectangle

Nous en avons déjà beaucoup parlé au point précédent. En s'aidant des définitions des pages précédentes, reconstruisons les formules utiles à propos du triangle ci-dessous.



$\alpha + \beta = 90°$
$l^2 = m^2 + n^2$

$\cos\alpha = m/l$
$\sin\alpha = n/l$
$\tan\alpha = n/m$

$\cos\beta = n/l$
$\sin\beta = m/l$
$\tan\beta = m/n$

Imaginons le problème suivant.
Dans le rectangle ci-dessous, on demande de calculer l'angle α de trois façons différentes.

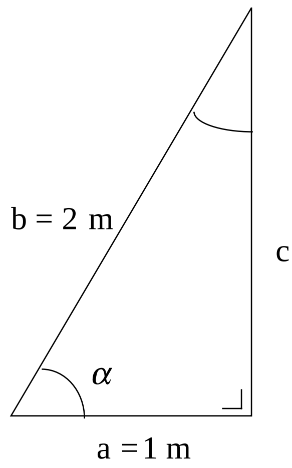
On obtient :

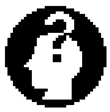
1) $\cos\alpha = 1/2 = (a/b)$

2) $c = \sqrt{(2)^2 - (1)^2} = \sqrt{3}$ m

(2.1) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{c}{b}$

(2.2) $\tan\alpha = \sqrt{3} = \frac{c}{a}$




Fonctions inverses
cos(60°)=1/2
arccos(1/2)=60°

La question posée au 1) s'écrit :

"Quel est l'angle α dont le cosinus égal 1/2 ?"

On note $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

La question posée en (2.1) se note :

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

La question posée en (2.2) se note

$$\alpha = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$$

La réponse à ces trois questions est évidemment 60° dans ce cas.

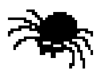
Les calculettes sont généralement équipées de ces fonctions inverses.
Le mode de celles-ci (degré, radian, ...) déterminera la réponse.

Exemple : $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45$ (mode degré)

$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0{,}785 \ \left(= \frac{\pi}{4}\right)$ (mode radian)

Remarques :

- D'autres fonctions inverses existent. Par exemple, quel est le nombre dont le carré vaut 4 ? La réponse est : la racine carrée de 4, c'est-à-dire 2.
- Les fonctions inverses ne sont pas toujours univoques. En effet :
  - $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire "quel est l'angle dont le sinus est 0.5 ?" vaut 30° (ce que répond la calculette) mais aussi 150°.
  - $\sqrt{4} = 2$ ou -2 car ces deux nombres élevés au carré donnent 4.


Deux réponses pour une seule "question".

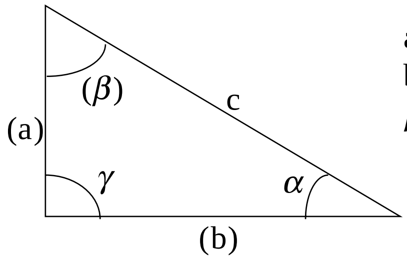
Il faut donc parfois interpréter, en fonction du problème, la réponse fournie par la calculette.

1) <u>Résolutions formelles des problèmes de triangles rectangles</u>

Pour des facilités de notation, nous noterons les côtés *a*, *b* et *c* (l'hypoténuse) et les angles α (face à *a*), β (face à *b*) et γ l'angle droit. Il faudra cependant apprendre à faire ces problèmes en se libérant de ces conventions.

Les données seront indiquées près des côtés connus, des angles connus (γ est supposé connu et vaut 90°). Les inconnues figureront entre parenthèses.

1 - c, α connus



a ?
b ?
β ?

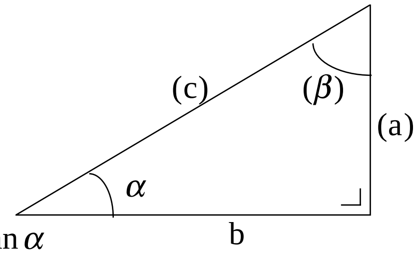
$\beta = 90° - \alpha$

$\frac{b}{c} = \cos\alpha \;\rightarrow\; b = c.\cos\alpha$

$\frac{a}{c} = \sin\alpha \;\rightarrow\; a = c.\sin\alpha$

Vérification : $a^2 + b^2$ égale-t-il c^2 ?

2 - b, α connus



a ?
β ?
c ?

$\beta = 90° - \alpha$

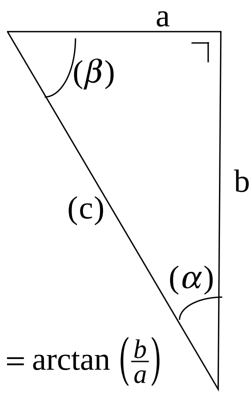
$\frac{a}{b} = \tan\alpha \;\rightarrow\; a = b.\tan\alpha$

$\frac{b}{c} = \cos\alpha \;\rightarrow\; c = \frac{b}{\cos\alpha}$

Vérification : $c^2 - a^2$ égale-t-il b^2 ?

3 - a et b connus

α ?
β ?
c ?



$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

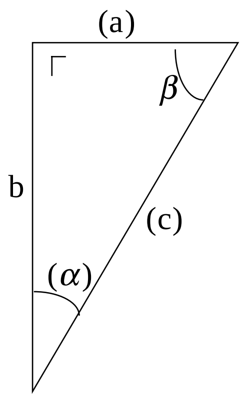
$\frac{b}{c} = \cos\alpha \;\rightarrow\; \alpha = \arccos\left(\frac{b}{c}\right)$

$\beta = 90° - \alpha$ ou $\beta = \arccos\left(\frac{a}{c}\right)$ ou $\beta = \arcsin\left(\frac{b}{c}\right)$ ou $\beta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Toutes ces variantes sont autant de **vérifications** que l'on peut effectuer pour **contrôler soi-même** son résultat.

4 - b et β connus

a ?
α ?
c ?



$\alpha = 90° - \beta$

$a = \frac{b}{\tan\beta}$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Vérification

$\cos\beta$ égale-t-il $\frac{a}{c}$?

$a = \frac{b}{\tan\beta}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$

$c = b / \cos\alpha$

Vérification

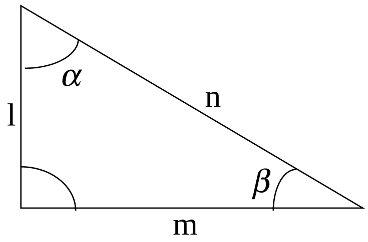
$\alpha = 90° - \beta$?

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$?

Exercice 23

Compléte le tableau suivant :

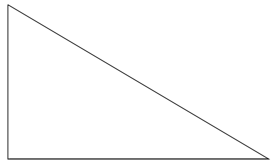
	m	l	n	α	β
A	8	6	-	-	-
B	-	-	20	57°	-
C	-	13	-	-	58°
D	-	14	-	7°	-



Exercice 24

La figure ci-contre représente un triangle rectangle.

1. **Mesure** (avec une latte) ses trois côtés et nomme-les.



2. **Calcule** les deux angles à partir des mesures des côtés (autres que l'angle droit).

3. **Vérifie** tes calculs avec un rapporteur.

On peut bien évidemment s'inventer des tas de problèmes sur le canevas présenté à l'exercice 24, par exemple :
1. **mesurer** un des deux angles non droits et l'hypoténuse;
2. **calculer** les autres dimensions;
3. **vérifier** les calculs par la mesure.

2) <u>Quelques cas particuliers</u>

a) Le triangle isocèle

Voici un triangle isocèle, les angles α et β sont égaux, ainsi que les côtés a et b.

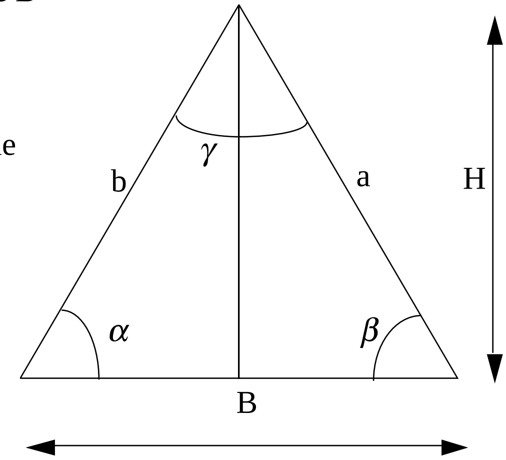
A partir de la connaissance de sa base B et de sa hauteur H, déterminer ses dimensions angles et côtés?

Ce triangle peut être considéré comme la juxtaposition de deux triangles rectangles.

Dès lors :

$$\alpha = \beta = \arctan\left(\mathrm{H} / (\mathrm{B} / 2)\right)$$

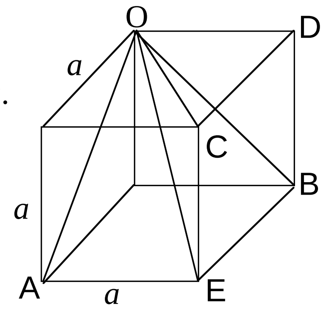
$$a = b = \sqrt{\mathrm{H}^2 + \left(\tfrac{\mathrm{B}}{2}\right)^2}$$

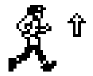


Exercice 25

Soit un triangle équilatéral de côté a.
Détermine, en fonction de a, la grandeur de sa hauteur?

b) Les triangles inscrits dans le cube





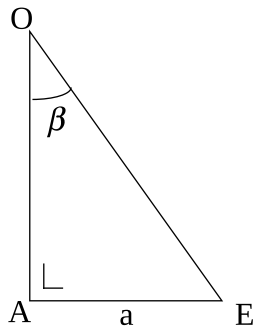
Diagonale du cube

La figure ci-contre représente un cube de côté a.
On demande l'angle entre OA et OE (noté β)?
On relève AE = a

OA = $a\sqrt{2}$

OE = $a\sqrt{3}$

En outre, OA est perpendiculaire à AE.



La figure ci-contre montre le triangle OAE;
l'angle demandé est β.

$$\tan\beta = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

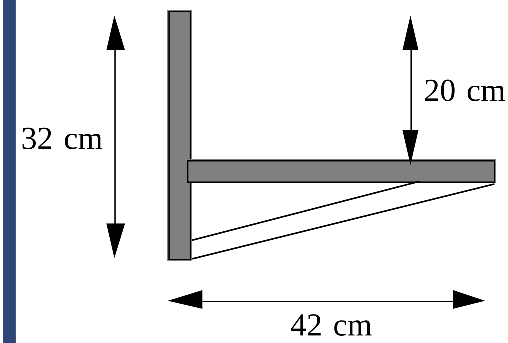
$$\beta = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 35{,}26°$$

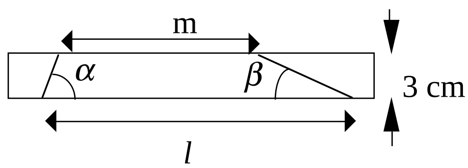
Exercice 26

Que vaut l'angle entre OC et OA?
Que vaut l'angle entre OD et OB?

Exercice 27

Un bricoleur veut consolider une étagère dont le profil est donné ci-dessous, les planches font 2 cm d'épaisseur.
Pour ce faire, il utilisera une poutre de section rectangulaire de 3 cm d'épaisseur.



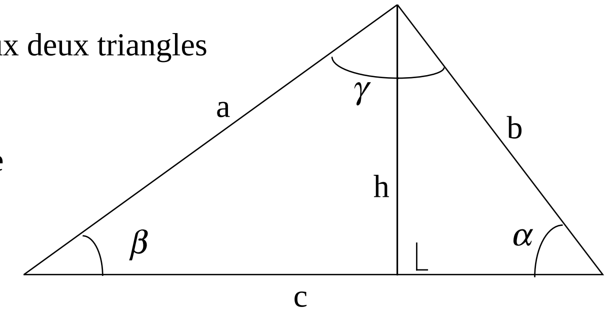


Nous allons l'aider en calculant les dimensions l et m et les angles α et β assurant une découpe correcte.
Le bricoleur vérifiera tes calculs sur un modèle découpé dans du carton par exemple. Fais-en de même!

2. Le triangle quelconque

1) <u>La règle des sinus</u>

La hauteur h est commune aux deux triangles rectangles inscrits.



Triangle rectangle de gauche

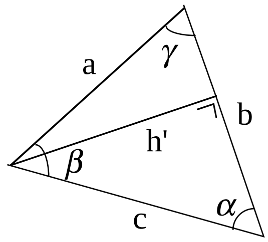
$$h = a\sin\beta$$

Triangle rectangle de droite

$$h = b\sin\alpha$$

En égalant les deux relations pour h, on trouve :

$$h = \underbrace{a\sin\beta = b\sin\alpha}_{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}} = h$$



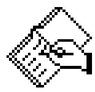
En appliquant la même méthode (essayez-le) pour la hauteur h’, on obtient :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

La règle des sinus pour un triangle quelconque s’énonce

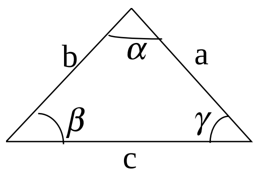
$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

Comme nous l’avons vu précédemment , fais l’exercice de «dessiner» et de «lire» ces formules, par exemple :
"Un côté d’un triangle est au sinus de l’angle opposé comme un autre côté est au sinus de l’angle qui lui fait face".



Exercice 28

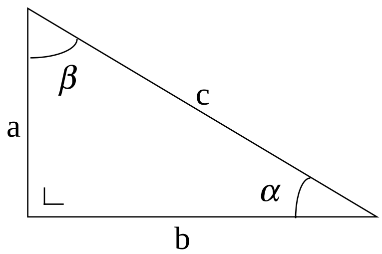
Ecris la relation des sinus pour le triangle quelconque ci-contre.



La relation du triangle quelconque vaut évidemment pour un triangle rectangle.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin(90°)} \quad \rightarrow \quad a = c\sin\alpha$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{1} \quad \rightarrow \quad b = c\sin\beta$$

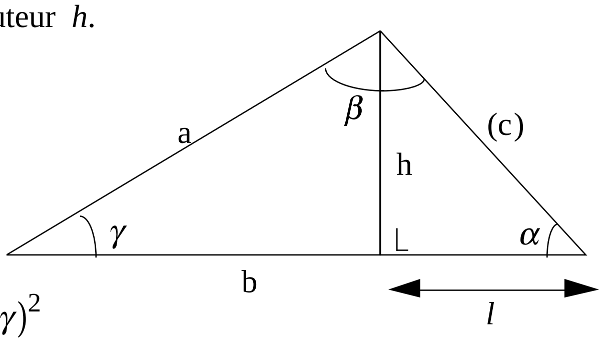


Ces relations sont-elles conformes aux formules précédentes pour le triangle rectangle ?

2) <u>La règle des cosinus</u>

Le propos est de trouver une règle, complémentaire au théorème de Pythagore, dans un triangle quelconque. **Il s'agit de calculer un côté *c*, sachant que les autres côtés *a* et *b*, ainsi que les angles connus.**

Comme précédemment, ramenons ce triangle quelconque à deux triangles rectangles en tracant la hauteur *h*.



$$\frac{h}{a} = \sin\gamma \quad \rightarrow \quad h = a\sin\gamma$$

$$l = b - a\cos\gamma$$

et

$$c^2 = h^2 + l^2$$

$$c^2 = a^2\sin^2\gamma + (b - a\cos\gamma)^2$$

Or, la formule du binôme est : $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

Donc

$$c^2 = a^2\sin^2\gamma + b^2 + a^2\cos^2\gamma - 2ab\cos\gamma$$

$$c^2 = a^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Nous avons démontré plus haut que pour un angle θ (théta) quelconque :

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

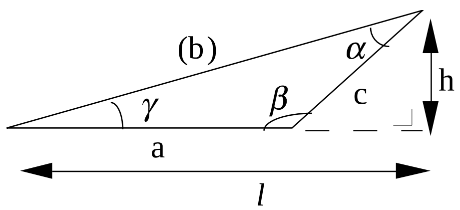
On obtient : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Remarque : Si $\gamma = 90°$ on retrouve le théorème de Pythagore.

Exercice 29

Montre que

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}$$



Indication

$$b^2 = h^2 + l^2$$

$h =$

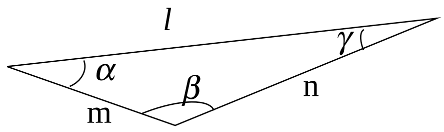
$l =$

Nous lirons cette relation :
Dans un triangle quelconque, le carré d'un côté donné est égal à la somme des carrés des deux autres côtés **moins** le double produit de ces côtés multiplié par le **cosinus** de l'angle qui fait face au côté que l'on calcule.

Ainsi $\boxed{a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha}$

Exercice 30

Ecris la règle des **cosinus** (3 expressions) pour le triangle quelconque ci-dessous.



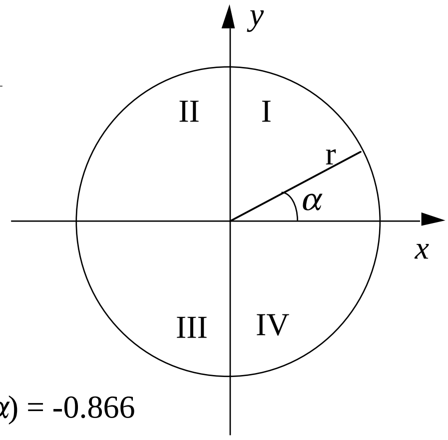
l =
m =
n =

3) <u>Résolutions formelles des problèmes de triangles quelconques</u>

a) Rappel

Les fonctions trigonométriques ont un signe qui diffère suivant les quadrants :

	I	II	III	IV
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-
$\cos\alpha = \frac{x}{r}$	+	-	-	+
$\sin\alpha = \frac{y}{r}$	+	+	-	-
$\tan\alpha = \frac{y}{x}$	+	-	+	-



(r > 0)

Ainsi si (1) : cos (α) = -0.500 **et** (2) : sin (α) = -0.866 l'angle α appartient au troisième quadrant.

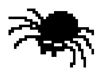
Les fonctions inverses demandent une interprétation.

Prenons une calculette et calculons.

$\alpha = \arccos(-0{,}500) \;\rightarrow\; \alpha = 120°$ (quadrant II)

$\alpha = \arcsin(-0{,}866) \;\rightarrow\; \alpha = -60°$ (quadrant IV)

Ces réponses sont incomplètes et fausses dans la cas présent. Si le **cosinus et** le **sinus** sont négatifs, l'angle doit appartenir au troisième quadrant.

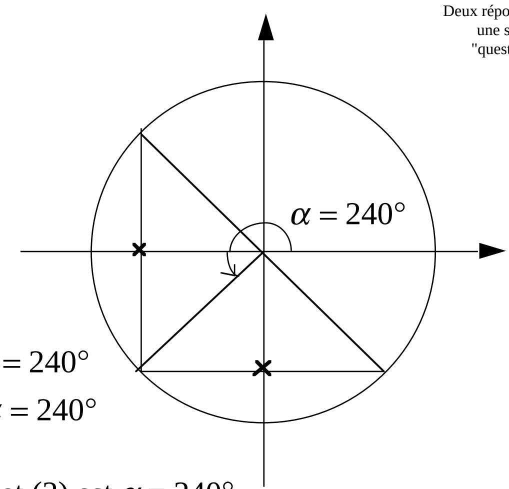


Deux réponses pour une seule "question".

Nous savons que :

$\cos(120°) = \cos(240°) = -0{,}500$

$\sin(-60°) = \sin(240°) = -0{,}866$



Complétons nos réponses.

$\alpha = \arccos(-0{,}5) \;\rightarrow\; \alpha = 120°$ ou $\alpha = 240°$

$\alpha = \arcsin(-0{,}866) \;\rightarrow\; \alpha = -60°$ ou $\alpha = 240°$

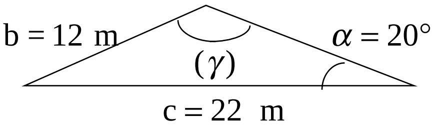
La solution "**simultanée**" des équations (1) et (2) est $\alpha = 240°$.

Application

Dans le problème ci-contre, la règle des sinus fournit :

$$\frac{12}{\sin(20°)} = \frac{22}{\sin\gamma}$$

$$\sin\gamma = \frac{22\times\sin(20°)}{12} = 0,63$$



$\gamma = \arcsin\ (0,63) \ \rightarrow\ \gamma \cong 39°\ \text{ ou }\ 141°$

L'examen de la figure nous fera retenir la valeur $\gamma = 141°$.

Le sinus est positif dans les quadrants I ET II

Retenons

. Au-delà de la valeur fournie par la calculette, les fonctions inverses nécessitent souvent une interprétation

Exemple: $\sqrt{4} = +2 \ \text{ ou }\ -2\ \text{ mais }\ \sqrt[3]{-8} = -2$

$\sin\theta = 0,5 \ \rightarrow\ \theta = 30°\ \text{ ou }\ \theta = 150°$

. Comme le montre le tableau à la page précédente, la connaissance du **sinus et** du **cosinus** de l'angle cherché permet de lever l'indétermination.

. Un dessin, approximativement à l'échelle, peut aider à lever l'indétermination.

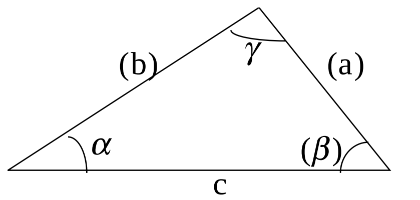
b) Exemples de résolution et cas particuliers

(Le point d'exclamation indique de faire attention aux indéterminations).

$\beta = 180° - \alpha - \gamma$ a ?

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \ \rightarrow\ a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$$ b ?

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}$$ β ?



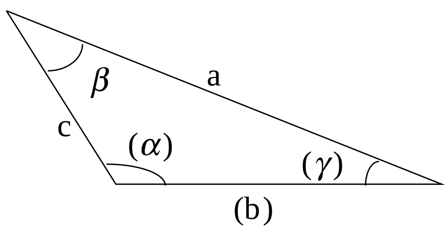
Vérification : $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$?

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}$$ b?

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$ α?

$$\rightarrow \sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b}\ \ (!)$$ γ?

$$\rightarrow \alpha = \arcsin\left((a\sin\beta)/b\right)$$

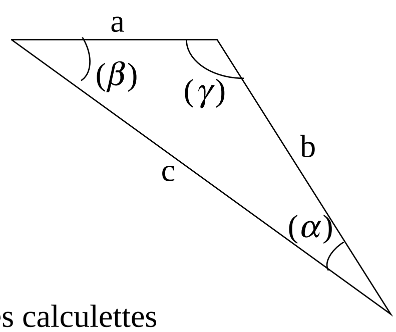


$\gamma = 180° - \alpha - \beta$ **Vérification** : $\dfrac{a}{c} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$ α?

$$\rightarrow \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$ β ?

$$\rightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$ γ?



Il n'y a pas d'indétermination, car les calculettes fournissent pour la fonction **arccos**, un angle entre 0° et 180°.

De même $\beta = \arccos\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)$ et $\alpha = \arccos\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

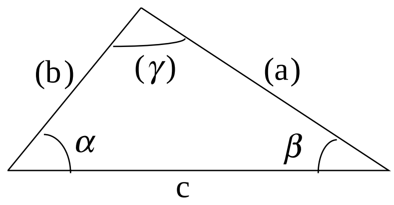
Vérification : $\alpha+\beta+\gamma = 180°$?

Dans un triangle les angles sont compris entre 0° et 180°. La fonction **arccos** est souvent préférable à utiliser.

$\gamma = 180° - \alpha - \beta$

$b = \dfrac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$

$a = \dfrac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$



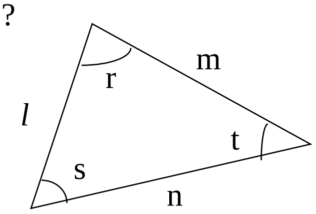
a?

b?

γ?

Vérification : $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$?

Exercice 31

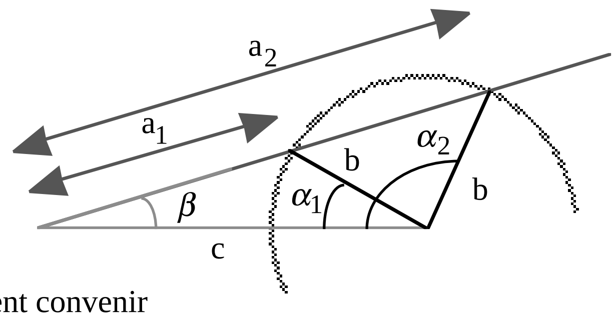


Compléte le tableau suivant :

	l	m	n	t	s	r
1	-	-	9	63°	55°	-
2	15	-	20	-	44°	-
3	-	-	28	29°	-	24°
4	22	21	34	-	-	-

Un problème particulier

On donne :
- la longueur du côté *c*;
- la longueur du côté *b*;
- l'angle *β*.



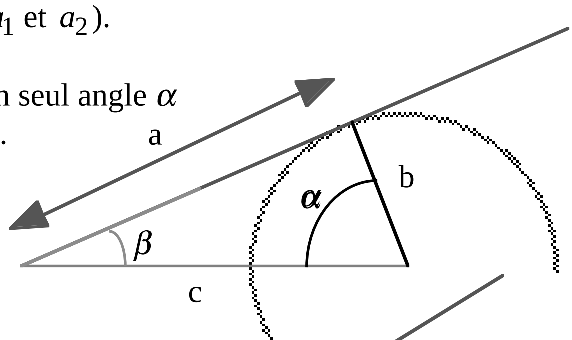
Dans la situation ci-dessus deux angles α_1, α_2 semblent convenir (et deux longueurs de côtés a_1 et a_2).

Dans la situation ci-contre, un seul angle α semble satisfaire le problème.

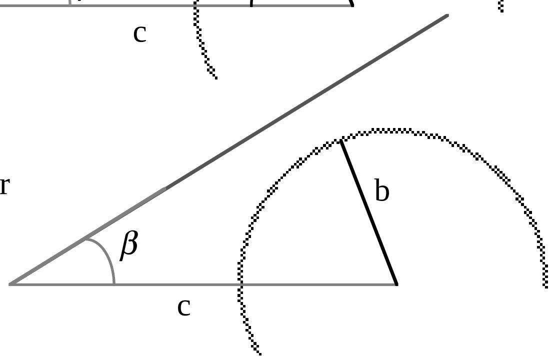
$b = c\sin\beta$

$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$

$a = \sqrt{c^2-b^2}$



Ci-contre, il semble ne pas y avoir de solutions : $b < c\sin\beta$.



Dans le cas général, les équations de départ s'écrivent :

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad (1) \qquad\qquad \sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b} \quad (2)$$

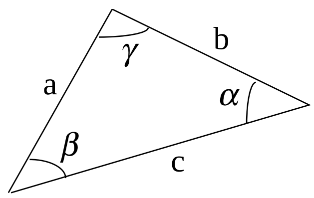
Avec deux inconnues a et α.
En retirant (a) de l'équation (2) et en l'injectant au carré dans l'équation (1).
On obtient :

$$\cos\alpha = \frac{b^2\sin^2\beta + c^2\sin^2\beta - b^2\sin^2\alpha}{2bc\sin^2\beta}$$

En remplacant ($\sin^2\alpha$) par ($1-\cos^2\alpha$), on obtient une équation du second degré en ($\cos\alpha$), l'inconnue restante (en effet, b, c, β sont connus).
Comme nous le verrons, cette équation admet 2 solutions, 1 solution, ou pas de solution du tout.

Exercice 32

Dans le triangle ci-contre, mesure trois éléments quelconques parmi a, b, c et α, β, γ.



- Calcule les trois éléments manquants.
- Vérifie tes calculs sur le dessin en mesurant les grandeurs correspondantes.

- **Triangle isocèle**

Application

Calculer la base B, connaissant les deux côtés égaux a et l'angle au sommet γ.

$B = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2\cos\gamma}$

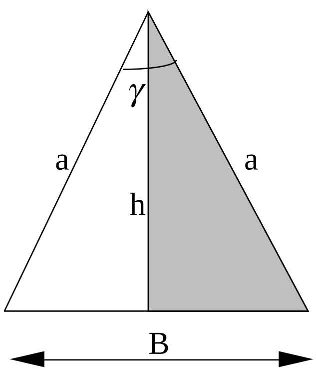
$B = \sqrt{2a^2(1-\cos\gamma)}$

Or (page I.23) $\quad \cos\gamma = \cos^2(\gamma/2) - \sin^2(\gamma/2)$

$B = \sqrt{2a^2\left(1-\cos^2(\gamma/2)+\sin^2(\gamma/2)\right)}$

$B = \sqrt{2a^2\left(\sin^2(\gamma/2)+\sin^2(\gamma/2)\right)}$

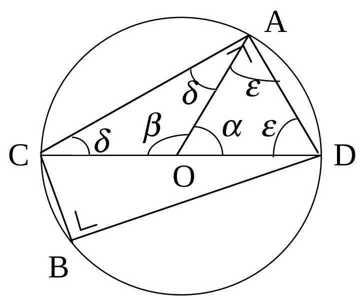
$B = \sqrt{4a^2\left(\sin^2(\gamma/2)\right)} \quad = 2a\sin(\gamma/2)$



Ceci est évident dans le triangle rectangle ombré. Cette formule sera utilisée plus tard dans l'étude du mouvement circulaire.

- **Triangle rectangle**

A prouver : pour un point quelconque d'un cercle (A) ou (B),
les cordes issues de ce point
et reliant les extrémités d'un
diamètre sont perpendiculaires.



OA = OC = OD = R

1°) . Triangle OAD : c'est un triangle isocèle :

$$OA = OD = R \qquad AD = 2R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

. Triangle OCA : c'est un triangle isocèle :

$$OC = OA = R \qquad CA = 2R\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Calculons $AD^2 + CA^2 = 4R^2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 4R^2\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$

Or $\beta = \pi - \alpha$ et $\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$; donc $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et $\left(\frac{\beta}{2}\right)$ sont complémentaires.

On obtient $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

et donc

$$\begin{aligned} AD^2 + CA^2 &= 4R^2\left[\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] \\ &= 4R^2 \\ &= (2R)^2 \end{aligned}$$

=> le triangle CAD est rectangle en A.

2°) On peut démontrer cela autrement (toujours à l'aide des triangles isocèles susmentionnés).

$$\begin{aligned} 2\delta &= 180° - \beta \\ 2\varepsilon &= 180° - \alpha \\ \hline 2(\varepsilon + \delta) &= 360° - (\alpha - \beta) \\ &= 180° \qquad \rightarrow \varepsilon + \delta = 90° \end{aligned}$$

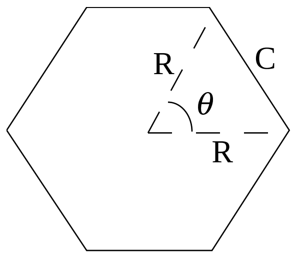
- **Périmètres et surfaces de polygones réguliers**

Application

Considérons un polygone constitué de 6 côtés, l'hexagone.
L'angle θ sous lequel un de ses côtés est vu est de 60° soit 360°/6.
Ce côté vaut :

$$C = 2R\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$C = 2R\sin\left(\frac{360°}{12}\right)$$



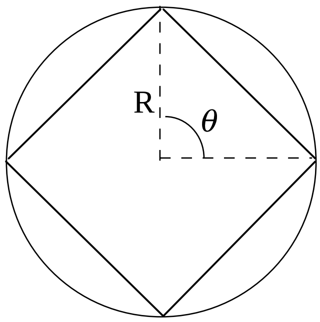
En général, un polygone régulier possède n côtés dont la longueur est :

$$C = 2R\sin\left(\frac{360°}{2n}\right) = 2R\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

où R est le rayon du cercle circonscrit.

Exercice 33

Vérifie la relation ci-dessus
dans le cas d'un carré.

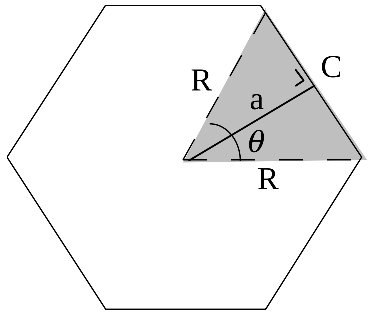


Le périmètre d'un tel polygone s'écrira, en fonction du rayon *R* du cercle dans lequel il est inscrit et du nombre *n* de côtés.

Périmètre
d'un polygone

$$P = 2nR\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Reprenons l'hexagone.
Son apothème *a* vaut :



$$a = R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$a = R\cos\left(\frac{360°}{12}\right)$$

En général, un polygone ayant n côtés, possède un apothème de longueur :

$$a = R\cos\left(\frac{360°}{2n}\right) = R\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

La surface du triangle ombré vaut donc :

$$s = \frac{a \times C}{2} = R^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Comme $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \times \cos\alpha$, on obtient :

$$s = \frac{R^2}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

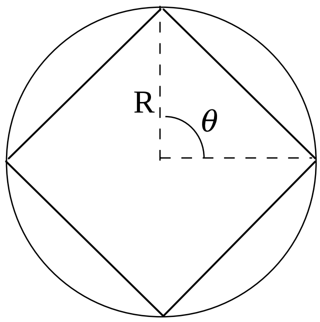
La surface totale du polygone s'écrit donc :

$$S = n \times s = \frac{nR^2}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Surface
d'un polygone

Exercice 34

Vérifie ainsi la surface d'un carré inscrit dans un cercle de rayon *R*.



- **Le sinus des petits angles**

Application

Remplissons ensemble le tableau suivant :

θ (degré)	$\sin\theta$	θ (radian)	$\tan\theta$
1	0.017	0.017	
2			
3	0.052	0.052	
5			
10	0.174	0.174	
15			
20	0.342	0.35	

Pour remplir la troisième colonne, on se souviendra que :

360° = 2 π radian

1° = (2π /360) radian

Pour des "angles petits", disons inférieurs à 20°, le sinus de l'angle égale à peu près l'angle **exprimé en radian,** ce qui s'écrira :

$$\sin\theta = \theta \text{ (radian)} \qquad \textbf{si } \theta \textbf{ petit}$$

Exercice 35

Montre, en suivant le même principe (en complétant le tableau ci-dessus) que cette relation vaut aussi pour la tangente.

$$\tan\theta = \theta \text{ (radian)} \qquad \textbf{si } \theta \textbf{ petit}$$

Comme $\cos\theta = \dfrac{\sin\theta}{\tan\theta} = \dfrac{\theta}{\theta} = 1$ si θ petit, on écrira

$$\cos\theta = 1 \qquad \textbf{si } \theta \textbf{ petit}$$

- **Où on retrouve le cercle et le disque**

Application

Reprenons les formules du périmètre et de la surface du polygone :

$$P = 2nR\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \qquad S = \frac{nR^2}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Le cercle peut être vu comme un polygone avec n, le nombre de côtés, devenant très grand.

Dans ce cas : $\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) = \dfrac{\pi}{n}$ et $\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) = \dfrac{2\pi}{n}$

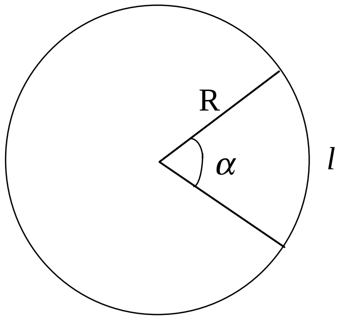
Alors : $P = 2nR\left(\dfrac{\pi}{n}\right) = 2\pi R$ $\qquad S = \dfrac{nR^2}{2}\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) = \pi R^2$

c'est-à-dire le périmètre du cercle et la surface du disque.

• Analyse des formules du périmètre et de la surface du disque

Application

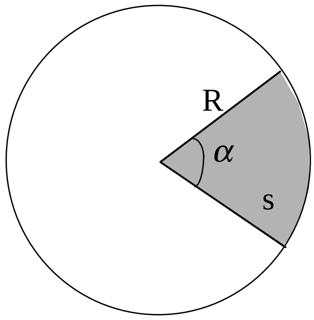
a. Le périmètre du cercle => Longueur de l'arc



- la longueur du périmètre 'total' du cercle est l'angle au centre 'total' (2π) multiplié par le rayon *R*;
- la longueur *l* est donc l'angle au centre (α) qui la sous-tend multiplié par le rayon *R* :

$l = \alpha .R$ avec α exprimé en radian

b. La surface du disque => Surface d'un secteur



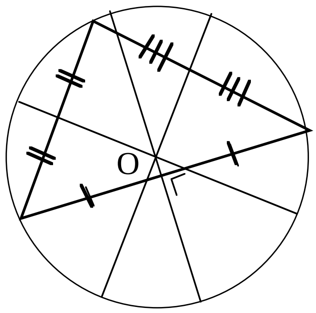
- la surface 'totale' du disque est la moitié de l'angle qui la sous-tend (2π) multipliée par le rayon au carré;
- la surface du secteur ombré ci-contre est la moitié de l'angle qui la sous-tend (α) multipliée par le rayon au carré :

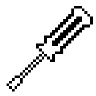
$s = \frac{\alpha}{2} R^2$ avec α exprimé en radian.

• Les cercles inscrits et circonscrits

Application

a. Considérons un triangle quelconque et traçons les médiatrices de chacun des cotés.





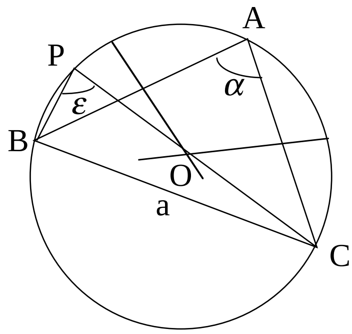
Centre du cercle circonscrit

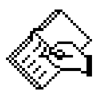
Le point O est le centre du cercle circonscrit ! (essayez).
Est-ce normal au vu de la méthode exposée pour trouver le centre d'un cercle ?

Cette façon de procéder vaut pour un quadrilatère quelconque.

b. Voici un **triangle quelconque** (ABC) et **son cercle circonscrit**.

Traçons le **diamètre passant par** C **et** O .
et dessinons le **triangle** PBC.





Commence à te construire (en grand) cette figure.

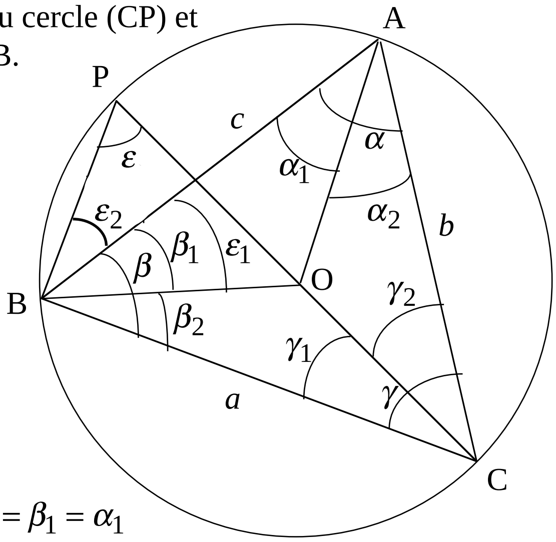
Ce dernier est rectangle en B.
On obtient :

$$\frac{a}{2R} = \sin\varepsilon = \frac{BC}{CP}$$

Nous allons maintenant prouver que $\varepsilon = \alpha$.

"Les angles inscrits dans le même arc de cercle son égaux"

Nous avons dessiné le diamètre du cercle (CP) et construit le triangle rectangle en B.



Prouvons que $\varepsilon = \alpha$.

On dessine les rayons OB et OA.

- l'angle $P\hat{B}O = \varepsilon$
  (triangle isocèle OPB)
- marquons ε_1 et ε_2
- marquons de même β_1, β_2, γ_1, γ_2, α_1 et α_2
- on déduit :

  triangle OAB (isocèle) : $\varepsilon_1 = \beta_1 = \alpha_1$

  de même en OBC : $\beta_2 = \gamma_1$

  de même en OAC : $\alpha_2 = \gamma_2$

Comme $\varepsilon_1 = \alpha_1$ **il reste à prouver** $\varepsilon_2 = \alpha_2$.

$\varepsilon_2 = 90° - \beta$ (triangle BPC rectangle en B)

$\varepsilon_2 = 90° - \beta_1 - \beta_2$ $(\text{car } \beta = \beta_1 + \beta_2)$

$\varepsilon_2 = 90° - \alpha_1 - \gamma_1$ $(\text{car } \beta_1 = \alpha_1 \text{ et } \beta_2 = \gamma_1)$

$\varepsilon_2 = 90° - (\alpha - \alpha_2) - (\gamma - \gamma_2)$

$\varepsilon_2 = 90° - \alpha - \gamma + \alpha_2 + \gamma_2$

$\varepsilon_2 = 90° - (\alpha + \gamma) + 2\alpha_2$ $(\text{car } \alpha_2 = \gamma_2)$

$\varepsilon_2 = 90° - (180° - \beta) + 2\alpha_2$ $(\text{car } \alpha + \beta + \gamma = 180°)$

$\varepsilon_2 = \beta - 90° + 2\alpha_2$

$\varepsilon_2 = -\varepsilon_2 + 2\alpha_2$ $(\text{car } \beta + \varepsilon_2 = 90°)$

On obtient : $\varepsilon_2 = \alpha_2$

On a donc bien : $\varepsilon_1 = \alpha_1$

$\varepsilon_2 = \alpha_2$

En additionnant ces deux équations, on a dès lors $\varepsilon = \alpha$.
En outre

$$\frac{a}{2R} = \sin\varepsilon = \sin\alpha$$ (relation dans le triangle rectangle PBC)

$$\rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = 2R = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Il s'agit d'une nouvelle interprétation de la règle des sinus : une façon d'obtenir le diamètre du cercle circonscrit
(à vérifier sur dessin).

Cette démonstration est ardue; il faut s'entraîner à la refaire, à l'aide des notes au début et progressivement en laissant le livre de côté (cfr page I.23)

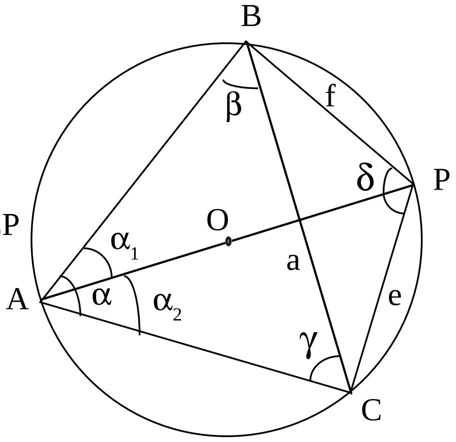
Cette démonstration se base sur des principes géométriques; l'exercice suivant est axé sur une autre démonstration à partir de considérations trigonométriques.

Exercice 36

Prouve $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$ par une méthode trigonométrique (avec $a = BC$).

- on trace le diamètre AP et les segments PB et PC, nommés *f* et *e*;

- l'angle α est coupé en deux éléments α_1 et α_2 et les triangles ABP et ACP sont rectangles en B et en C.



On a $f = 2R\sin\alpha_1$

$e = 2R\sin\alpha_2$

$\delta = 180° - \alpha$ (angles à côtés perpendiculaires)

- la règle des cosinus fournit :

$$a^2 = e^2 + f^2 - 2ef\cos\delta$$

$$a^2 = e^2 + f^2 + 2ef\cos\alpha \qquad (\delta \text{ et } \alpha \text{ supplémentaires})$$

on remplace *e* et *f* par leurs valeurs

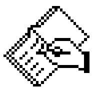
$$\cos\alpha = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2$$

on met $4R^2$ en évidence;

on forme la relation $(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_2\cos\alpha_1)^2$

$$= \sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$= \sin^2\alpha$$



A refaire au cahier.

- on obtient $a^2 = 4R^2\sin^2\alpha$ (CQFD).

Application

Le centre du cercle inscrit dans un triangle quelconque se trouve au point de rencontre des bissectrices des angles.

Les perpendiculaires abaissées d'un point de la bissectrice sur les côtés de l'angle sont égales .

OM = ON = R