

Examen de mathématiques

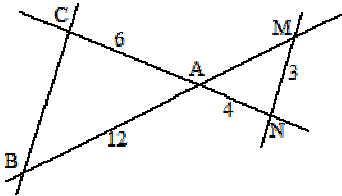
Décembre 2007 – durée 2h

Les documents sont interdits. La calculatrice est autorisée.

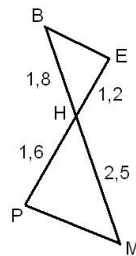
Partie A : Raisonnement et Logique (7 points)

- 1/
- Enoncer précisément le théorème de Thalès.
 - Enoncer précisément la réciproque du théorème de Thalès.
 - Enoncer précisément la contraposé du théorème de Thalès.
 - Déterminer dans quel cas chacune des propriétés précédentes s'applique (aucune justification n'est demandée).

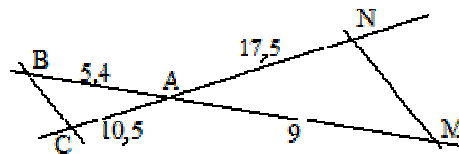
Exemple 1 : $(MN) \parallel (BC)$



Exemple 2

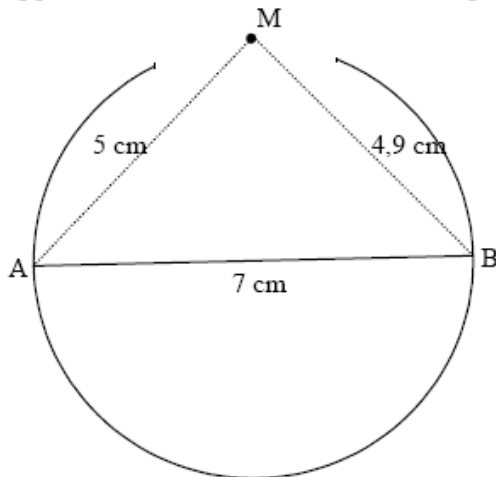


Exemple 3



- 2/ Résoudre le problème suivant en utilisant un raisonnement par l'absurde.

Le point M appartient-il au cercle de diamètre $[AB]$?



- 3/ Trois frères Alfred, Bernard et Claude ont des crayons de couleur différente bleu, rouge et vert. De plus, les assertions suivantes sont vraies :

- Si le crayon d'Alfred est vert, alors le crayon de Bernard est bleu ;
- Si le crayon d'Alfred est bleu, alors le crayon de Bernard est rouge ;
- Si le crayon de Bernard n'est pas vert, alors le crayon de Claude est bleu
- Si le crayon de Claude est rouge, alors le crayon d'Alfred est bleu.

Que peut-on conclure sur la couleur respective des crayons d'Alfred, Bernard et Claude? Y a-t-il plusieurs possibilités ?

4/ Etant donné deux entiers a et b , on considère les propositions suivantes:

P : a et b sont tous deux pairs.

Q : a et b sont de parité différente.

i. Ecrire la négation de P et Q .

ii. Parmi les implications, déterminer celles qui sont vraies :

- a. $P \Rightarrow Q$ b. $Q \Rightarrow P$ c. $P \Rightarrow \text{non } Q$ d. $Q \Rightarrow \text{non } P$ e. P et Q

Partie B : Géométrie (7 points)

1/

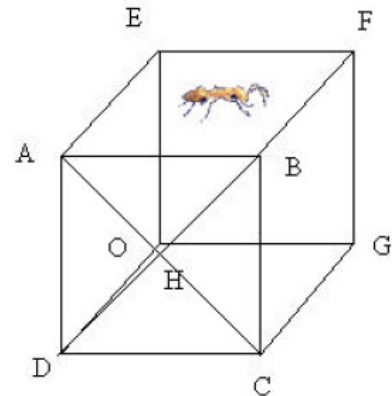
Les Babyloniens ont compilé des tables de triangles rectangles à **côtés entiers**. Dans chaque exemple ci-dessous, sont donnés deux des côtés, il faut trouver le troisième

1°) $a = 120$ et $b = 119$

2°) $a = 65$ et $b = 97$

2/

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1m . Une fourmi se déplace à la surface du cube du centre O de la face $ABCD$ au sommet F . Quel est la longueur du plus court chemin pour effectuer son périple ?



3/ Rectangles d'Euclide

Soit un rectangle $ABCD$ et M un point de la diagonale AC . On définit le rectangle $BIMJ$ tel que $I \in [AB]$ et $J \in [BC]$ et le rectangle $DKML$ tel que $K \in [AD]$ et $L \in [CD]$. Montrer que les deux rectangles ont la même aire (on pourra poser $x=DL$ et $y=BJ$).

4/

On se propose de déterminer par le calcul puis par une construction géométrique le côté g du carré ayant même aire qu'un rectangle de dimensions données a et b (exprimées avec la même unité)

1°) a) Déterminer le côté de ce carré pour $a = 4$ et $b = 9$ puis pour $a = 4$ et $b = 6$

b) Déterminer le côté g de ce carré dans le cas général en fonction de a et b .

2°) Dans un triangle ABC rectangle en C , la hauteur issue de C coupe (AB) en G . On note respectivement a et b les longueurs GA et GB .

a) démontrer que $CG = g$

b) En déduire la construction du côté d'un carré solution du problème posé. *

Partie C : Relations fonctionnelles (6 points)

1/ On mélange un liquide contenant 40% d'alcool et un liquide contenant 10% d'alcool pour obtenir un litre de liquide contenant 20% d'alcool.

Comment doit-on procéder ?

2/

Une entreprise fabrique des téléviseurs et des magnétoscopes. Cette entreprise est soumise à trois contraintes.

Contrainte de main d'œuvre : 70 ouvriers travaillent à la fabrication. En une heure, l'entreprise dispose donc de 70 heures de main d'œuvre. Il faut 1 heure de main d'œuvre pour fabriquer un téléviseur et 2 h de main d'œuvre pour fabriquer un magnétoscope.

Contrainte de budget : Les services comptables estiment qu'il ne faut pas dépasser un budget horaire de 36000 F pièces et main d'œuvre. Le prix de revient, pièces et main d'œuvre, est de 800 F pour un téléviseur et de 600 F pour un magnétoscope.

Contrainte de vente : Les services commerciaux ne peuvent pas écouler plus de 40 téléviseurs à l'heure ni plus de 30 magnétoscopes à l'heure.

Par ailleurs les bénéfices réalisés sont de 480 F par téléviseur et 320 F par magnétoscope.

1°) Est-il possible en respectant toutes les contraintes de produire et de commercialiser 40 téléviseurs à l'heure ?

2°) Est-il possible en respectant toutes les contraintes de produire et de commercialiser 30 magnétoscopes à l'heure ?

3°) Est-il possible en respectant toutes les contraintes de produire et de commercialiser 40 téléviseurs et 30 magnétoscopes à l'heure ?

4°) On appellera T et M respectivement le nombre de téléviseurs et de magnétoscopes. Traduire par 4 inéquations les contraintes de cette entreprise.

5°) Représenter graphiquement, l'ensemble auquel appartient (T,M) qu'il est possible de produire et de commercialiser par heure en respectant toutes les contraintes.

6°) Déterminer graphiquement les sous-ensembles de couples (T,M) pour lesquels les bénéfices horaires sont respectivement 4800 F et 14 400 F.

7°) Déterminer le sous ensemble de couples (T,M) pour lesquels le bénéfice horaire est maximal.