

Examen de mathématiques

Janvier 2007 – durée 1h 30min + QCM 30 min

Les documents sont interdits. La calculatrice est interdite durant le QCM.

Exercice 1 : Raisonnement (3 points)

1/ Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence la propriété suivante :

$$P(n) : 10^n - (-1)^n \text{ est divisible par 11}$$

2/ Démontrer par un raisonnement par l'absurde la proposition suivante :

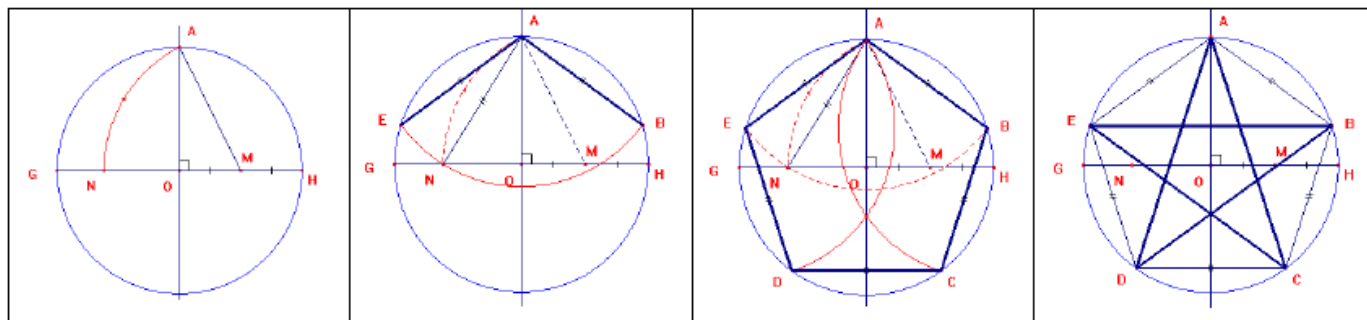
" Si n est le carré d'un nombre entier non nul alors $2n$ n'est pas le carré d'un nombre entier".

3/ Quelle est la contraposée du théorème de Pythagore?

Exercice 2 : Géométrie (4 points)

On rappelle que le nombre d'or Φ vérifie $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\Phi = \frac{1}{\Phi} + 1$.

La figure construite ci-dessous en 4 étapes est un pentagramme.



1/ Combien la figure admet-elle d'axes de symétrie ?

2/ On note G l'intersection de (AC) et (EB).

a. Calculer $\widehat{EAB}$, $\widehat{AEB}$ et $\widehat{EGA}$.

b. En déduire la nature du triangle EAG.

3/ On note $r = \frac{AC}{AB}$.

a. Quelle est la nature du quadrilatère ABCE ?

b. Montrer que $r = \frac{EC}{AB} = \frac{EG}{BG}$ et que $r = \frac{EB}{EG} = 1 + \frac{BG}{EG}$.

c. En déduire que $r = \Phi$.

Exercice 3 : Conchoïde de Nicomède (4 points)

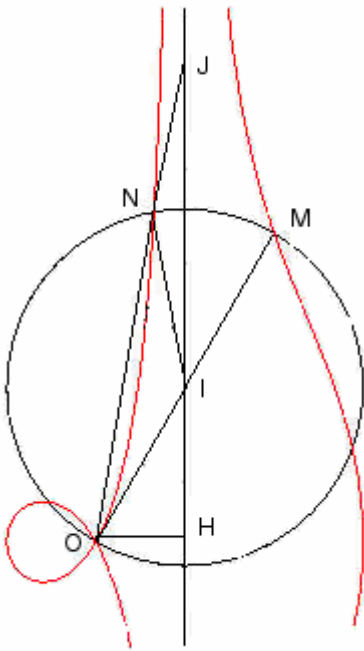
1/ Sur la figure page suivante, construire le partage de l'angle (xOy) en deux angles de même mesure en laissant les traits de construction.

2/ La trisection d'un angle (partage en trois angles de même mesure) n'admet que des constructions approchées.

a. Trouver deux mesures d'angle dont la trisection est constructible.

b. Une construction approchée est donnée par la méthode suivante :

Méthode : construire un triangle OHI rectangle en H , tel que $\widehat{OIH}$ soit l'angle à trisecter. Construire la conchoïde de la droite (IH) de pôle O et de module OI ; le cercle de centre I et de rayon OI coupe la conchoïde en M symétrique de O par rapport à I , et en un deuxième point N indiqué dont la construction ne peut être qu'approchée. L'angle trisécté est $\widehat{NIJ}$.



i. Déterminer la nature des triangles OIN et INJ.

ii. On note $\text{mes}(\widehat{NIJ}) = \alpha$. En déduire alors $\text{mes}(\widehat{NJI})$ puis $\text{mes}(\widehat{INO})$ et $\text{mes}(\widehat{NOI})$ en fonction de α .

iii. En déduire $\text{mes}(\widehat{IOH})$ et justifier la méthode utilisée.

Exercice 4 : Fonction (4 points)

Le jardin de monsieur Durand a la forme d'un trapèze rectangle, ABCD, tel que $AB = 50$ m, $AD = 30$ m, $DC = 70$ m. Les angles $\hat{A}$ et $\hat{D}$ sont droits. Soit M un point du segment $[AB]$. On pose $AM = x$.

La parallèle à la droite (AD) passant par M coupe la droite (DC) en G . Le jardin est ainsi partagé en deux parties :

- le rectangle AMGD qui est le potager ;
- le reste qui est la pelouse.

1) Calculer l'aire du jardin.

2) Exprimer en fonction de x , l'aire du rectangle AMGD (le potager). En déduire l'aire de la pelouse BCGM.

3) Pour quelle valeur de x la pelouse et le potager ont-ils la même aire ? Quelle est alors la forme du potager. Justifier les réponses.

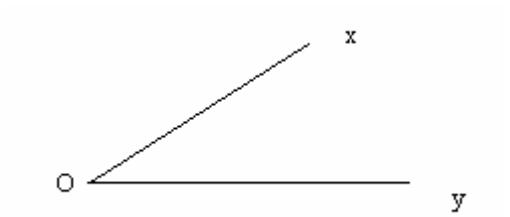
4) a. Représenter sur un même graphique, les fonctions donnant l'aire du potager AMGD et l'aire de la pelouse BCGM en fonction de x (unités graphiques : 1 cm pour 10 mètres sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 100 m² sur l'axe des ordonnées).

b. Retrouver graphiquement le résultat de la question 3. Expliquer.

5) Sachant que dix kilos de semences sont nécessaires pour une pelouse de 500 m², quelle quantité est nécessaire pour ensemer 900 m² ?

Nom :

Exercice 3



QCM (5 points)

Chaque bonne réponse apporte 0.5 points. Une mauvaise réponse retire 0.25 points.

Question	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					