

Examen de mathématiques

Janvier 2009 – durée 2h

Les documents sont interdits. La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 :**Exercice 2 : Raisonnement**Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété P suivante pour $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$: P : Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Définir la contraposée d'une implication $A \Rightarrow B$, A et B représentant des assertions. Démontrer l'équivalence à l'aide d'un tableau de vérité.
2. Ecrire la contraposée de la proposition P .
3. Démontrer qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$.
4. Prouver alors la contraposée.
5. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé ?

Exercice 3 : RaisonnementSoit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n + 1$ réels x_0, x_1, \dots, x_n de $[0, 1]$ variant de $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$.On veut démontrer par l'absurde la propriété P suivante : P : Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $\frac{1}{n}$.

1. Ecrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à la propriété.
2. Ecrire la négation de cette formule logique.
3. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété.

