Examen de rattrapage UE 3 : ENIHP1
Septembre 2008

Exercice (8 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2x^2 - 4x - 4xy + 4y^2 + 4$. On appelle S la surface définie dans $\mathbb{R}^3$ par $z=f(x,y)$.

1. Déterminer les applications partielles de f en (0,0).

2. Déterminer les dérivées partielles premières et seconde de f.

3. **a.** Calculer la différentielle totale de f.
b. En déduire une équation du plan tangent au point $(1,0,f(1,0))$

4. **a.** Montrer que la recherche des points critiques revient à résoudre le système suivant:

(S) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

b. Déterminer le(s) point(s) critique(s).
c. Démontrer que f atteint un extremum au point (2,1). Préciser la nature de cet extremum.
(On pourra développer $(x-2)^2+(x-2y)^2$)

Problème (12 points)

On considère une réaction chimique faisant intervenir 3 composants A, B et C. A l'instant t=0, (t en jours), la concentration en A est de 10 m/l, celle de B et de C est de 0 m/l.

Le composant A se transforme en composant B à la vitesse $k_{AB}=3$.
Le composant B se transforme de façon réversible en composant C à la vitesse $k_{BC}=1$.
Le composant C se transforme en B à la vitesse $k_{CB}=2$.

I/ Résolution d'un système d'équation différentielle.

1/ Décrire la réaction à l'aide d'un schéma.

2/ On note x, y et z les concentrations en fonction du temps de A, B et C respectivement.

a. Déterminer le système de 3 équations différentielles vérifié par x, y et z.

b. En remarquant qu'à tout instant t, on a x+y+z=10 montrer que le système peut s'écrire :

(S) x'=-3x (e1)
y'=x-3y+20 (e2)
z'=y-2z (e3)

3/ a. Résoudre (e1)

b. Résoudre (e2)

On pourra au choix utiliser la méthode de variation de la constante ou montrer qu'une solution particulière de (e2) est : $10te^{-3t} + \frac{20}{3}$

c. En déduire que $z = \frac{10}{3} - (10t + \frac{10}{3})e^{-3t}$

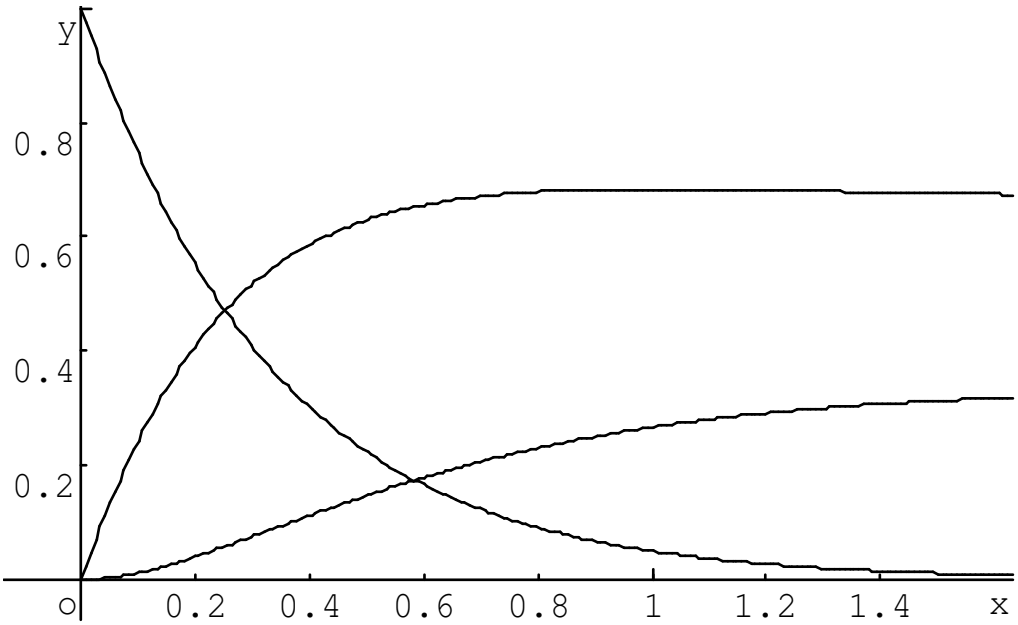
.

II Etude la fonction $f(x) = (10t - \frac{20}{3})\, e^{-3t} + \frac{20}{3}$ sur [0 ;+∞[.

1/ a. Calculer les limite de f aux bornes de l'ensemble de définition.
b. En déduire les concentrations atteintes par B et C au bout d'un temps t très grand.

2/ a. Calculer la dérivée f' de f et étudier le signe de f'.
b. En déduire le tableau de variation de f.
c. En déduire la concentration maximale atteinte par B et le temps nécessaire pour l'atteindre.

3/ Les courbes des concentrations en A, B et C sont données dans le graphique ci-dessous.



Représentation graphique des courbes de x, y et z (Les ordonnées sont divisées par 10)

a. Déterminer la courbe relative à chacun des composants A, B ou C.
b. Déterminer graphiquement le temps pour lequel :
   i. Les concentrations en A et B sont égales ?
   ii. La concentration en C est supérieure à celle de A ?