Université d'Angers - Master 1 MIM **Modélisation stochastique**

Rappels : Théorèmes limites

1 Quelques inégalités

Proposition 1 *Inégalité de Markov*
Soit X une v.a. positive d'espérance finie. On a pour tout $\epsilon > 0$:

$$P(X > \epsilon) \leq \frac{E(X)}{\epsilon}$$

Proposition 2 *Inégalité de Bienaymé-Tchebitchev*
Soit X une v.a. d'espérance $E(X)$ et variance σ^2 finies. On a pour tout $\epsilon > 0$:

$$P(\mid X - E(X) \mid > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

2 Convergence

Soit (X_n) une suite de v.a. réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On désigne par (F_n) la suite de fonctions de répartition correspondantes. Soit X une v.a. réelle définie sur le même espace (sauf pour la convergence en loi), de fonction de répartition F.

Définition 1 *Convergence en loi*
La suite (X_n) converge en loi vers X et l'on écrit $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$:
– si $F_n(x) \to F(x)$ en tout point de continuité de F.
– ou si pour toute fonction h continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\lim_n E(h(X_n)) = E(h(X))$

Définition 2 *Convergence en probabilité*
La suite (X_n) converge en probabilité vers X et l'on écrit $X_n \xrightarrow{p} X$ si pour tout $\epsilon > 0$, on a :

$$lim_n P(\{\mid X_n - X \mid > \epsilon\}) = 0.$$

Définition 3 *Convergence presque sûre*
La suite (X_n) converge presque sûrement vers X et l'on écrit $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ si :

$$P(\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \to X(\omega)\}) = 1$$

Lemme 1 *Lemme de Borel-Cantelli*
Soit (E_n) une suite d'événements, alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) < +\infty \quad \Rightarrow \quad P(lim\,sup_n(En)) = 0$$

Si de plus les événements E_n sont indépendants alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = +\infty \quad \Rightarrow \quad P(lim\,sup_n(En)) = 1$$

avec $lim\,sup_n(E_n) = \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{p\geq n} E_n$.

Définition 4 *Convergence en moyenne d'ordre r, $r >= 0$*
La suite (X_n) converge en moyenne d'ordre r vers X et l'on écrit :

$$X_n \xrightarrow{L^r} X \quad si \quad lim_n E(\mid X_n - X \mid^r) = 0$$

Proposition 3 *– La convergence en probabilité implique la convergence en loi*
– La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité
– La convergence en moyenne d'ordre r implique la convergence en probabilité

3 Théorèmes limites

3.1 Lois des grands nombres

En statistiques, la loi des grands nombres indique que lorsque l'on fait un tirage aléatoire dans une série de grande taille, plus on augmente la taille de l'échantillon, plus les caractéristiques statistiques de l'échantillon se rapprochent des caractéristiques statistiques de la population. On distingue loi faible et loi forte en fonction du mode de convergence, en probabilité et presque sûre, respectivement.

Proposition 4 *loi faible des grands nombres 1*
Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes, de même loi ayant une espérance $E(X)$ finie. On a alors :

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \xrightarrow{p} E(X)$$

Proposition 5 *loi faible des grands nombres 2*
Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes, ayant une même espérance $E(X)$ finie et même variance σ^2 finie (carré intégrable). On a alors :

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \xrightarrow{p} E(X)$$

Proposition 6 *loi forte des grands nombres*
Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes, de même loi ayant une espérance $E(X)$ finie. On a alors :

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \xrightarrow{p.s.} E(X)$$

3.2 Théorème central limite

Proposition 7 *loi forte des grands nombres*
Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes, de même loi ayant une espérance $E(X)$ finie et une variance $\sigma^2 < +\infty$ finie. On a alors :

$$\frac{X_1 + ... + X_n - nE(X)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \quad ou \quad \frac{\dfrac{X_1 + ... + X_n}{n} - E(X)}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

En statistiques, la somme d'un grand nombre de variables est presque gaussienne, cette approximation est à la base d'un grand nombre de tests statistiques. Indépendamment de la loi initiale d'une variable X, la moyenne de n réalisations suit approximativement une loi normale. On consière en pratique que $n \geq 30$ est suffisant dans la majorité des applications.

On peut observer également que bon nombre de phénomènes naturels sont dus à la superposition de causes nombreuses, plus ou moins indépendantes. Il en résulte que la loi normale les représente de manière raisonnablement efficace.
À l'inverse, on peut dire qu'aucun phénomène concret n'est vraiment gaussien car il ne peut dépasser certaines limites, en particulier s'il est à valeurs positives.

4 Rappels sur les fonctions caractéristiques

Définition 5 *fonction caractéristique*
Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle fonction caractéristique de X la fonction de la variable réelle t définie par :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_E e^{itx}\mu_X(dx)$$

- *Si X est discrète de loi $\mu_X = \sum_k p_k\delta_{x_k}$ alors :*
$$\varphi_X(t) = \sum_k p_k e^{itx_k}$$
- *Si X est absolument continue de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue (λ), $\mu_X(dx) = f_X(x)dx$ alors :*
$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}f(x)dx$$
- *On généralise cette définition à une variable à valeur dans $\mathbb{R}^d$:*
$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}(e^{i<u,X>})$$

Proposition 8 *Tableau des fonctions caractéristiques des lois usuelles*

Loi	*Loi de probabilité*	*Fonction caractéristique*
Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	$p_k = \binom{n}{k}p^kq^{n-k}\ (0 \leq k \leq n)$	$(q+pe^{it})^n$
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$p_k = e^{\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}\ (k \leq 0, \lambda \leq 01)$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$	$p_k = pq^{k-1}\ (k \leq 1)$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$
Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}I_{[0,\infty[}(x)\ (\lambda > 0)$	$\dfrac{\lambda}{\lambda - it}$
Loi normale $\mathcal{N}(0,1)$	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$	$e^{-t^2/2}$
Loi de Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$	$e^{-\|t\|}$

Proposition 9 *Propriété fondamentale La fonction caractéristique d'une mesure de probabilité détermine cette mesure.*

Proposition 10 *Formule d'inversion*
Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}^d$. Si $\hat{\mu}$ est intégrable, μ admet une densité continue et :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-it.x}\hat{\mu}(t)dt$$

Proposition 11 *Couple de v.a. indépendantes (X,Y)*
Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles. On a alors :l'équivalence suivante :

1. *X et Y sont indépendantes,*
2. *$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_{(X,Y)}(u,v) = \varphi_X(u)\varphi_Y(v)$*
   et
3. *$\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$*

Proposition 12 *Théorème de Paul Lévy Soit (X_n) une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et X une v.a. à valeur dans $\mathbb{R}^d$. Soient φ_{X_n} et φ_X leurs fonctions caractéristiques. On a alors les équivalences suivantes :*

1. *X_n converge en loi vers X.*
2. *φ_{X_n} converge simplement vers φ_X.*