

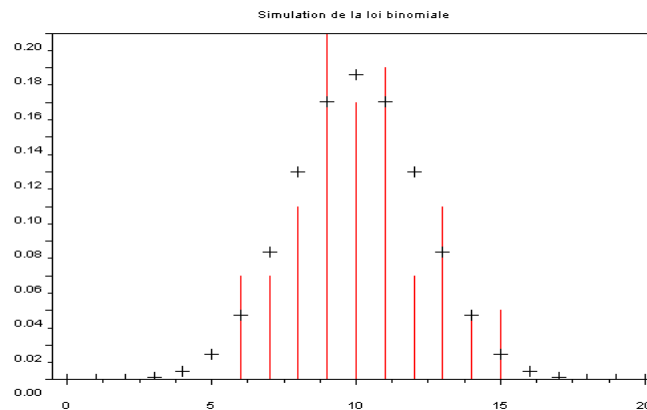
TP : Simulation de Variables Aléatoires

Activité 1 : Simulation d'une loi discrète

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale (p, n) . Exprimer mathématiquement X en fonction d'une suite de n variables aléatoires uniformes (U_i) sur $[0, 1]$.

A partir de la fonction rand simulant la loi uniforme U sur $[0, 1]$, construire les deux fonctions scilab :

2. `k=bin(p, n)` simulant la loi binomiale de paramètres p et n .
3. `histobin(s, p, n)` représentant la distribution obtenue avec s nombres et l'adéquation à la loi originale.
4. Reprendre les mêmes questions avec la loi géométrique.



5. Construire une fonction `uniforme_discret(n)` qui simule la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ à l'aide de la fonction `floor`. Vérifier l'adéquation de votre fonction.

Activité 2 : Simulation via la fonction de répartition (méthode d'inversion)

1. Montrer que la v.a. $X = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - U)$ suit la loi exponentielle.
2. Rappeler la méthode utilisée dans le cas de v.a. discrètes comme la loi de Poisson.

A partir de la fonction rand simulant la loi uniforme U sur $[0, 1]$, construire les deux fonctions scilab :

3. `x=expo(p)` simulant la loi exponentielle de paramètre p .
4. `histoexpo(s, p)` représentant la distribution obtenue avec s nombres et l'adéquation à la loi originale.
5. En déduire une fonction simulant la loi de Poisson de paramètre λ . Tester l'adéquation de la simulation.

6. Reprendre 3 et 4 avec la loi de Cauchy.



Activité 3 : Méthode du rejet

1. Rappeler le principe de la méthode du rejet.
2. Analyser la fonction suivante.

```
function rejet
X=zeros( 1 , 10000 ) ;
for i =1:10000;
x=rand ( 1 , 2 ) ;
while x(2)> sin (%pi * x( 1 ) ) ,
x=rand ( 1 , 2 ) ;
end ;
X( i )=x ( 1 ) ;
end ;
xbasc ( )
histplot(100 ,X) ;
Y=[ 0 : 0.05 : 1 ] ;
plot2d (Y,%pi * sin(%pi * Y) / 2 ) ;
endfunction
```

3. Construire la fonction `rejet_disque(s)` simulant s nombres suivant la loi uniforme sur le disque à l'aide de la loi uniforme sur un pavé. Représenter graphiquement cette simulation.

Activité 4 : Simulation de la loi normale par la méthode de Box Mueller

La méthode repose sur le résultat suivant. Si U_1 et U_2 sont deux v.a. indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ alors la v.a. Y définie par :

$$X = \sqrt{-2 \log U_1} \times \sin(2 \times \pi \times U_2) \text{ et } Y = \sqrt{-2 \log U_1} \times \cos(2 \times \pi \times U_2)$$

suit un couple de lois normales centrées réduites indépendants.

1. Construire une fonction simulant une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 .
2. Construire l'histogramme correspondant à n tirages et comparer le à la fonction de densité correspondante à l'aide d'un test statistique.
3. Programmer la simulation suivant la loi normale bidimensionnelle de moyenne $\mu=(-1;1)$ et de matrice de variance covariance $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,5 \\ 1,5 & 3 \end{pmatrix}$.

Activité 5: Simulation de la loi gaussienne par rejet

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|)$

1. Montrer que g est bien une densité sur $\mathbb{R}$.
2. Soit f la fonction de densité de la loi normale centrée réduite. Montrer que la constante $k = \sqrt{\left(\frac{2e}{\pi}\right)}$ vérifie pour tout réel x : $f(x) \leq kg(x)$.
3. Ecrire un algorithme de simulation d'une loi gaussienne centrée réduite par rejet.

Activité 6: Simulation de quelques lois

1. Loi du χ^2

La somme du carré de n v.a. suivant la loi normale centrée réduite suit la loi du χ^2 à n ddl. En déduire la simulation de la loi du χ^2 à 1 ddl à l'aide de la fonction `grand(,,'nor',,)` et valider cette simulation. La fonction de densité de la loi du χ^2 est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$$

2. Loi de Cauchy

Le rapport de deux v.a. suivant la loi normale centrée réduite suit la loi de Cauchy.

- Construire la fonction `cauchy1()` simulant cette loi à l'aide de la fonction `grand(,,'nor',,)`. Construire ensuite l'histogramme de S nombres simulés et valider la simulation. Il faudra faire attention à la fenêtre utilisée ainsi qu'au nombre de classes.
La fonction de densité de la loi de Cauchy est :

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

- Montrer que la variable $Y = \tan(\pi(U - 0,5))$ suit la loi de Cauchy. Construire la fonction `cauchy2` simulant cette loi avec la méthode d'inversion..
- En déduire une nouvelle simulation de la loi de Cauchy et valider cette simulation.