

TD n° 1. Théorèmes limites

Exercice 1 Pour tout entier $n \geq 1$, définissons la fonction $F_n(x) = \frac{e^{nx}}{e^{nx} + 1}$.

Montrer qu'il existe une suite de variables aléatoires (X_n) dont la loi est donnée pour chaque n par F_n .

Cette suite converge-t-elle en loi ?

Exercice 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 1 - \cos 2n\pi x, \quad \text{si } x \in]0, 1[\\ f_n(x) &= 0, \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit X_n , une v.a. de densité f_n . Montrer que la suite (X_n) converge en loi bien que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas.

Exercice 3 On considère une suite de v.a.r. (X_n) discrètes uniformes à valeurs dans $\{1/n, 2/n, \dots, 1\}$. Montrer la convergence en loi vers la loi uniforme sur $[0, 1]$ de deux façons (fonctions caractéristiques, $\mathbb{E}(f(X_n))$).

Exercice 4 Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes telles que pour chaque entier positif n :

$$P(X_n = \frac{1}{2^n}) = P(X_n = 0) = \frac{1}{2}$$

Montrer que la suite de v.a. (S_n) définie par $S_n = X_1 + \dots + X_n$ converge en loi vers une v.a. uniformément distribuée sur $[0, 1]$.

Exercice 5 Soit (p_n) une suite de réels dans $]0, 1[$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda > 0$. Soit (X_n) une suite de v.a. telles que pour tout n X_n suive la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ et X une v.a. de loi de poisson de paramètre λ . Montrer que (X_n) converge en loi vers X .

Exercice 6 Soit (X_n) une suite de v.a. réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer la limite en loi de la suite $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} X_k$.

Exercice 7 Soit la suite de v.a.r. (X_n) définie par $X_n = 1_{[0; 1/n]}$. Calculer φ_{X_n} et sa limite. Conclure.

Exercice 8 Considérons une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de v.a. telle que X_n suive une loi exponentielle de paramètre λ_n . On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$. Soit $Z_n = X_n - [X_n]$, où $[x]$ désigne la partie entière du réel x .

1. Quelles sont les valeurs possibles de Z_n ?
2. Déterminer la fonction de répartition de Z_n .
3. Montrer que Z_n converge en loi. Préciser sa limite.

Exercice 9 On définit la suite de v.a. (X_n) par :

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$$

Montrer que X_n converge en probabilité vers la v.a. constante 0 mais pas presque sûrement.
Reprendre l'exercice avec :

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad P(X_n = 1) = \frac{1}{n^2}$$

Exercice 10 Soit X une v.a. uniformément distribuée sur $[0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

et tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$\begin{aligned} Y_n(\omega) &= n \quad \text{si} \quad 0 \leq X(\omega) \leq 1/n \\ Y_n(\omega) &= 0 \quad \text{si} \quad X(\omega) < 0 \quad \text{ou} \quad X(\omega) > 1/n. \end{aligned}$$

- 1) La suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ converge-t-elle presque sûrement ?
- 2) La suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ converge-t-elle en loi ?
- 3) La suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ converge-t-elle en moyenne (c'est à dire dans L^1) ?

Exercice 11 Loi de Cauchy

Soit $U = (U_1, U_2)$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi normale $\mathbb{N}_2(0, I_2)$.

1. Rappeler la fonction de densité de U .
2. On définit une v.a. $X = g(U)$ avec la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall u \in \mathbb{R}^2 \quad g((u_1, u_2)) = \frac{u_1}{u_2}$ si $u_2 \neq 0$, et 0 si $u_2 = 0$.
On définit la fonction T sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{u_2 = 0\}$ par $T(u_1, u_2) = (\frac{u_1}{u_2}, u_2)$
 - (a) Montrer que T définit un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2 \setminus \{u_2 = 0\}$ dans lui même.
 - (b) A l'aide d'un changement de variables, en déduire la loi de T .
 - (c) A l'aide du théorème de Fubini, en déduire la loi de X .
3. La loi de X s'appelle la loi de Cauchy. Calculer sa fonction de répartition et ses moments (si vous pouvez).

Exercice 12 Loi faible des grands nombres

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires 2 à 2 indépendantes telles que :

- Pour tout n , X_n a une espérance finie μ_n et $\frac{\sum_{i=1}^n \mu_i}{n}$ tend vers μ fini.
- Pour tout n , X_n a une variance finie σ_n^2 et $\frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{n^2}$ tend vers 0

Montrer que $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ converge en probabilité vers la variable certaine μ (on pourra utiliser l'inégalité de Bienayme Tchebychev).

Exercice 13 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi de Poisson de

paramètre $\lambda > 0$. 1) Quelle est la loi de $X_1 + \dots + X_n$? Que vaut $P(X_1 + \dots + X_n \leq n)$?
2) Utiliser le théorème central limite pour montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 14

1. Démontrer que pour tout réel $\epsilon > 0$, la probabilité que dans une succession de n épreuves de Bernoulli indépendante de même paramètre p la fréquence F_n des succès s'écarte au plus de ϵ tend vers 0 quand n tend vers l'infini (théorème d'or de Bernoulli).
2. Buffon au cours d'une expérience a lancé 4040 fois une pièce et a obtenue 2049 pile. Déterminer un intervalle tel que la probabilité d'obtenir pile dans cet intervalle soit au moins égale à 0.95.

Exercice 15 On lance un dé jusqu'à ce que la somme totale des nombres obtenus

dépasse 301. Quelle est la probabilité qu'il faille au moins 81 jets?

Exercice 16 Un fournisseur d'accès à Internet met en place un point local d'accès,

qui dessert 5000 abonnés. A un instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres.

1. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant t . Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance, son écart-type?
2. On pose $Y = \frac{X-1000}{\sqrt{800}}$. Justifier précisément qu'on peut approcher la loi de Y par la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
3. Le fournisseur d'accès souhaite savoir combien de connexions simultanées le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à 2,5%. En utilisant l'approximation précédente, proposer une valeur approchée de ce nombre de connexions (on pourra utiliser une table de la loi normale).