TP 2 : Equations différentielles

Activité 1 : Equation différentielle d'ordre 1

On étudiera dans cette partie les équations différentielles définies sur un intervalle I par :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

On illustrera les fonctions avec l'exemple suivant sur $I = [0,1]$:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -y(t) + t + 1 \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

1. Ecrire la fonction gradient(f,a) construisant le champ de tangentes dans le domaine du plan défini par $-a \leqslant t \leqslant a$ et $-a \leqslant y \leqslant a$ à l'aide de la fonction champ.
2. Rappeler la méthode d'Euler.
3. Ecrire la fonction [t,y]=euler(f,t0,y0,tmax,n) permettant la construction de la courbe intégrale sur [t0,tmax] vérifiant y(t0)=y0 avec n pas.
4. Construire les courbes intégrales pour différentes valeurs de (t0,y0) dans le champ de tangentes.
5. Calculer la solution exacte et comparer le résultat obtenu pour différentes valeurs de n. On tracera dans un même repère la courbe exacte et les courbes obtenues avec n de 10 à 50 en allant de 10 en 10.
6. Ecrire les fonctions runge2(f,t0,y0,tmax,n) et runge4(f,t0,y0,tmax,n) permettant la construction de la courbe intégrale sur [t0,tmax] vérifiant y(t0)=y0 avec n pas à l'aide des méthodes de Runge Kutta d'ordre 2 et 4..

Runge Kutta d'ordre 2

$$y(t_{i+1}) = y_i = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} v_1\right) \text{ avec } v_1 = f(t_i, y_i)$$

Runge Kutta d'ordre 4

$$y_{i+1} = y_i + \frac{v_1 + 2v_2 + 2v_3 + v_4}{6} h$$

$$\text{avec } \begin{cases} v_1 = hf(y, y_i) \\ v_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{v_1}{2}\right) \\ v_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{v_2}{2}\right) \\ v_2 = hf(t_i + h, y_i + v_3) \end{cases}$$

7. Comparer les trois méthodes pour un nombre identique de calculs.
8. Déterminer la solution donnée avec la fonction ode.

Quelques sites

http://www.ann.jussieu.fr/~dumas/aide.html
http://ufrmeca.univ-lyon1.fr/formation/DESS/SCILAB/coursode.pdf
http://www-timc.imag.fr/Benoit.Scherrer/teaching/an_e2i2_index.html
http://www.math.u-psud.fr/~apoung/mywepage/L3/td_cours_2.pdf

Activité 2 : Equation différentielle d'ordre m et système d'équations

On étudie dorénavant une équation d'ordre 2 définie par :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dt^2} = f\left(t, y(t), \dfrac{dy}{dt}\right) \\ y(t_0) = c_1 \\ \dfrac{dy}{dt}(t_0) = c_2 \end{cases}$$

Ce problème revient à l'étude du système :

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_{2(t)} \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f(t, y_1(t), y_2(t)) ¿ \text{ en posant } y_1(t) = y(t) \text{ et } y_2(t) = \dfrac{dy}{dt}(t) \\ y_{1(t_0)} = c_1 \\ y_{2(t_0)} = c_2 \end{cases}$$

Les méthodes d'approximations précédentes se généralisent directement pour de tels systèmes.

1. Construire la fonction [T,Y]=runge4sys(f,t0,y0,tmax,N) permettant le calcul les courbes intégrales pour un système de m équations, avec y0 un vecteur de dimension m, f une fonction $f(t, Y)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$, t0 l'instant initial et tmax l'instant final et N le nombre de points.
   Les arguments de sorties sont T un vecteur de N temps régulièrement espacés entre t0 et tmax et Y une matrice $N \times m$ contenant les solutions approchées pour les différents temps.
   On pourra tester la fonction sur un exemple élémentaire, par exemple :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. **Etude de l'exemple de l'équation de Van der Pol**

L'équation de Van der Pol décrit le fonctionnement d'un oscillateur entretenu. Sa forme générale est :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - c(1 - y^2)\frac{dy}{dt} + y = 0 \text{ avec } c \text{ une constante.}$$

a. Montrer que l'équation est équivalente au système différentiel:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = c(1 - y^{2(t)})\, x(t) - y(t) \\ \dfrac{dy}{dt}(t) = x(t) \end{cases}$$

b. Ecrire la fonction dY=vanderpol(t,Y) calculant $\dfrac{dx}{dt}$(t) et $\dfrac{dy}{dt}$(t).

c. Représenter le champ de vecteur dans l'espace des phases (x, y) avec la fonction fchamp dans le domaine du plan défini par $-5 \leqslant x \leqslant 5$ et $-5 \leqslant y \leqslant 5$.

d. Tracer dans le plan de phases la solution vérifiant $x(0) = -1$ et $y(0) = 1$ en utilisant runge4sys et ode pour t variant de 0 à 50.

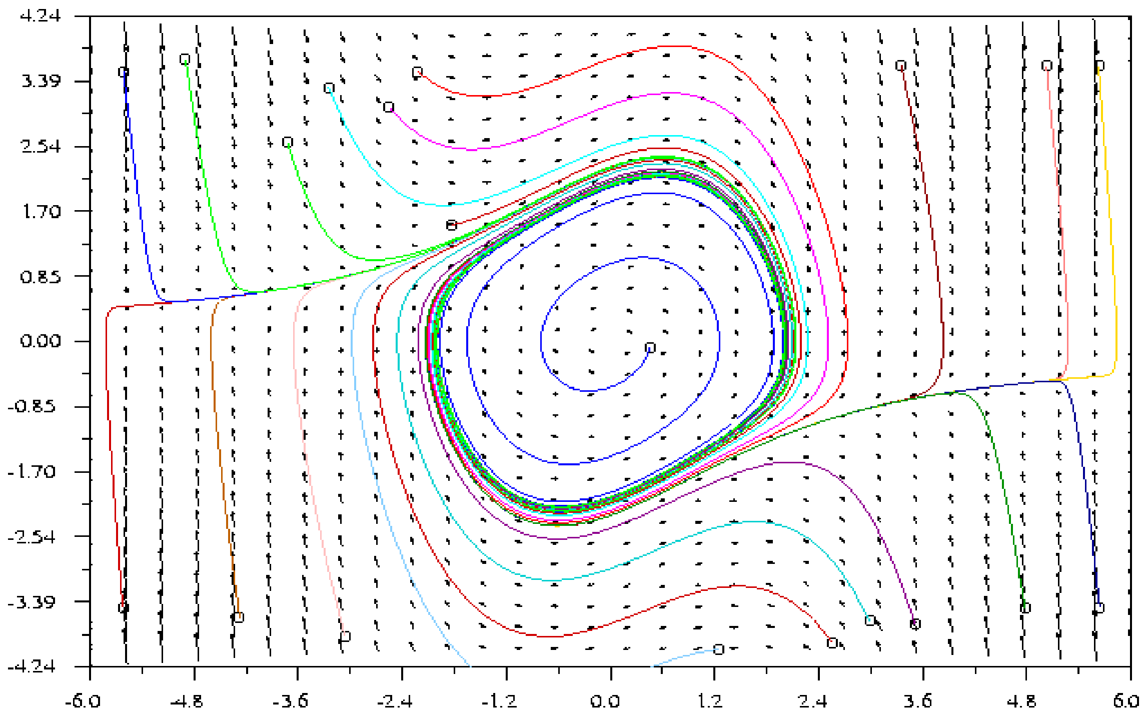
i Comparre les deux méthodes de résolution.
ii Que se passe-t-il si la condition initiale varie?
iii Que se passe-t-il si c varie?

e. Tracer la solution de l'équation différentielle en fonction de t.

f. Interpréter la fonction suivante pour déterminer interactivement les solutions en fonction des conditions initiales définies avec la souris.

```
function gradient()
// Tracé du champs de vecteur issu de l'équation de VAN DER POL :
n = 30; dx = 6; dy = 4;
x = linspace(-dx,dx,n);
y = linspace(-dy,dy,n);
clf();
fchamp(vanderpol,0,x,y,1,[-dx,-dy,dx,dy],"031")
xselect()
endfunction

function solution()
// Résolution interactive de l'équation différentielle
// xclick : c_i==0 si click gauche, 2 si click droit
// c_x et c_y sont les coordonnées lors du click
m = 500 ; T = 30; t = linspace(0,T,m);
couleurs = [21 2 3 4 5 6 19 28 32 9 13 22 18 21 12 30 27];
num = -1;
while %t
[c_i,c_x,c_y]=xclick();
if c_i == 0 then
plot2d(c_x, c_y, -9, "000")
u0 = [c_x;c_y];
[u] = ode(u0, 0, t, vanderpol);
num = modulo(num+1,length(couleurs));
plot2d(u(1,:),u(2,:),couleurs(num+1),"000")
elseif c_i == 2 then
break
end
end
endfunction
```



g. Mais our!uoi se fatiguer alors !u"en faisant ortrait(#ander ol) ...

Quelques sites sur l'équation de Van der Pol

http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Oscillateurs/vdp_phase.html

http://labo.ntic.org/meca/vanderpol.html

Activité 3 : Etude d'un problème concret

A Trieste, pendant la première guerre mondiale, la pêche avait bien sûr diminué à cause des événements. La pêche consistait à lancer des filets et à récuperer tous les poissons. Le bureau des pêches avait constaté qu'alors la proportion de poissons du style requins, peu intéressants pour la consommation, avait considérablement augmenté par rapport aux poissons intéressants du style sardines. Ils demandèrent l'aide de Volterra qui modélisa le système requins-sardines par le système des deux équations difféerentielles suivantes où x(t) représente le nombre de sardines et y(t) représente le nombre de requins :

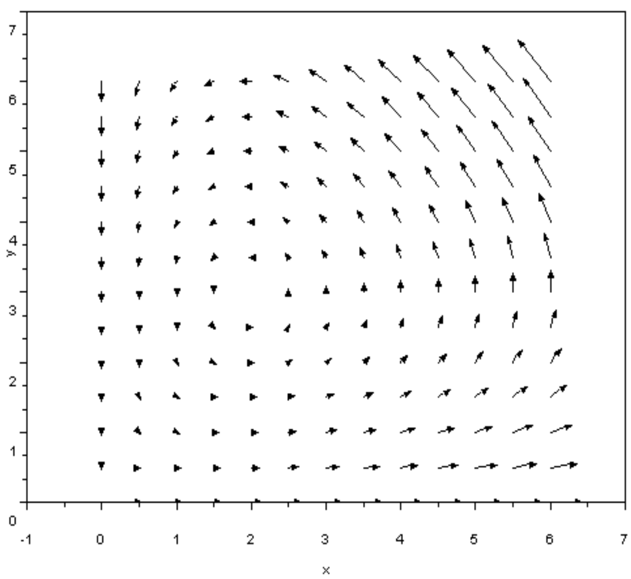
$$\frac{dx}{dt} = a\ x(t) - bx(t)y(t) \text{ avec } a\,;b > 0$$
$$\frac{dy}{dt} = c\,x(t)\ y(t) - d\,y(t) \text{ avec } c\,;d > 0$$
$$x(0) = x_0 \text{ et } y(0) = y_0$$

Ce modèle approché, appelé aussi système de Lotka-Volterra, signifie qu'en l'absence de requins les sardines prolifèrent $x_0(t) = ax(t)$, qu'en l'absence de sardines les requins disparaissent $y_0(t) = -dy(t)$ et le terme en $x(t)\,y(t)$, qui représente la rencontre des requins et des sardines, augmente le nombre de requins et diminue le nombre de sardines (car ces dernières sont mangées par les requins).

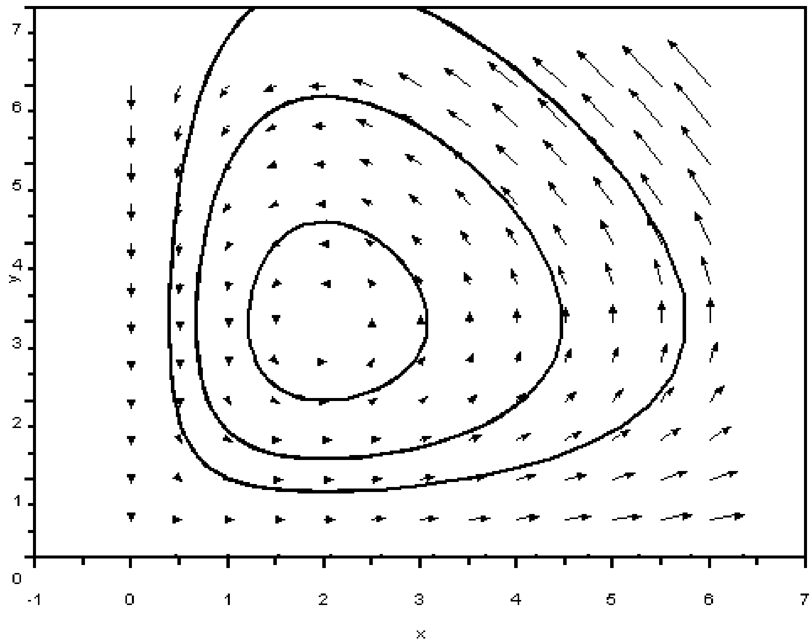
A partir de ce modèle, Volterra en déduit, sans pouvoir faire les calculs numériques que plus on pêche de poissons, plus la proportion de sardines, donc de poissons intéressants, est importante ! C'est ce que nous allons essayer de retrouver par le calcul, en recherchant le point d' équilibre du système dynamique dans l'espace des phases.
On prendra par exemple pour l'application numérique a=3, b=1, c=1 et d=2 et un cas ou on augmente la fréquence de pêche a=a-delta d=d+delta a=1, b=1, c=1 et d=4

1. Construire le portrait de phase correspondant :
2. Représenter quelques solutions en fonction des conditions initiales.
3. Discuter les résultats suivant les valeurs de a,b,c,d.
4. Construire le portrait de phase et les trajectoires des espèces dans une même fenêtre.
5. Pour les plus motivés, rendre dynamique la présentation.

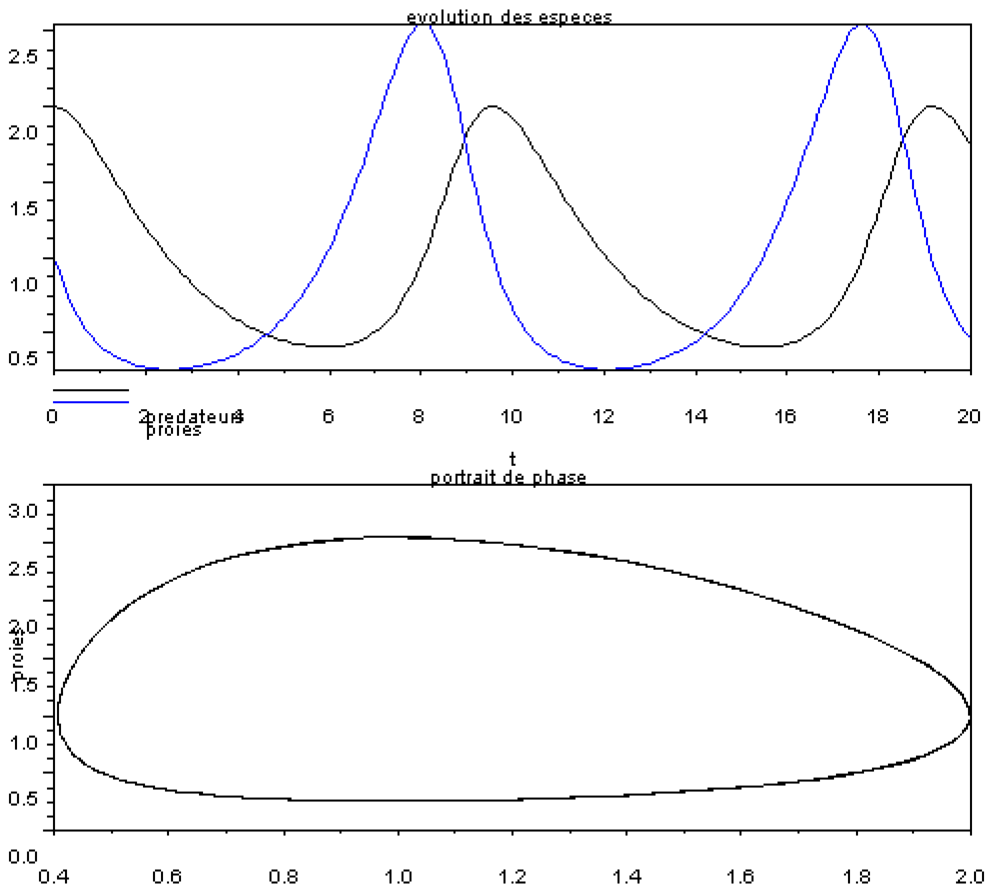
Portrait de phase



Portrait de phase et quelques trajectoires



Evolution des espèces et trajectoire



Quelques rappels théoriques