AGROCAMPUS OUEST **Mai 2009**

ANGERS 1ere année

UE III MATHEMATIQUES

Exercice I

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $P(t)$.

   $P' = \frac{1}{2} P(1-P)$ avec $P(0) = 0{,}01$

2. $\cdot P = \frac{1}{y}$ donc $P' = \frac{-y'}{y^2}$ et $-\frac{-y'}{y^2} = \frac{1}{y}\left(1 - \frac{1}{y}\right)$ soit $-y' = \frac{1}{2}(y-1)$ donc $y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}$ avec $y(0) = 100$.

3. On a une e.d. linéaire du premier ordre, on résoud l'équation sans second membre :

   $y' + \frac{1}{2}y = 0$ soit $y_0 = k\, e^{-\frac{t}{2}}$

   En prenant $y_E = 1$, on obtient une solution évidente de l'équation avec second membre, donc la solution générale est :

   $y = k\, e^{-\frac{t}{2}} + 1$ avec $y(0) = 100$ soit $k = 99$.

   Donc $y = 99\, e^{-\frac{t}{2}} + 1$

4. $\cdot P(t) = \dfrac{1}{99\, e^{-\frac{t}{2}} + 1}$

5. La figure 1 correspond au champ de tangente. Chaque vecteur représente la direction de la tangente au point (t,P). Pour tracer la trajectoire avec $P(0) = 0{,}01$, on part du point (0;0,01) et on suit la direction des tangentes.

6. On donne $P(t) = \dfrac{1}{99\, e^{-t/2} + 1}$.

   a) $P'(t) = \dfrac{99}{2} \dfrac{e^{-\frac{t}{2}}}{\left(99\, e^{-\frac{t}{2}} + 1\right)^2} > 0$, donc P(t) est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

   $$P''(t) = \frac{99}{2} \frac{-\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}\left(99\, e^{-\frac{t}{2}} + 1\right)^2 + 99\, e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\left(99\, e^{-\frac{t}{2}} + 1\right)}{\left(99\, e^{-\frac{t}{2}} + 1\right)^4}$$

   $$= \frac{99}{2}\, e^{-\frac{t}{2}} \left(99\, e^{-\frac{t}{2}} + 1\right) \frac{\left(99\, e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\left(99\, e^{-\frac{t}{2}} + 1\right)\right)}{\left(99\, e^{-\frac{t}{2}} + 1\right)^4}$$

   La dérivée seconde s'annule et change de signe (point d'inflexion) pour t vérifiant :

   $99 e^{-\frac{t}{2}} - 1 = 0$ soit $t = -2 \ln\left(\frac{1}{99}\right) \approx 9{,}19$

   b) On résoud :

   $\dfrac{1}{99\, e^{-\frac{t}{2}} + 1} = \dfrac{1}{2}$ soit $99\, e^{-\frac{t}{2}} + 1 = 2$ donc $t = -2 \ln\left(\frac{1}{99}\right) \approx 9{,}19$

   $\dfrac{1}{99\, e^{-\frac{t}{2}} + 1} = 0{,}9$ soit $99\, e^{-\frac{t}{2}} + 1 = \dfrac{10}{9}$ donc $t = -2 \ln\left(\dfrac{1}{9 \times 99}\right) \approx 13,$

   a) On place l'asymptote horizontale y=1, la tangente en 0, le point d'inflexion, les points du b.

b) I= $\int_0^t \frac{1}{\left(99\,e^{-\frac{s}{2}}+1\right)}\,ds$

On pose $u=99\,e^{-\frac{s}{2}}$ soit $du=-\frac{99}{2}\,e^{-\frac{s}{2}}\,ds$ donc $ds=-\frac{2(du)}{u}$

Pour $s=0$ $u=99$ et pour $s=t$ $u=99\,e^{-\frac{t}{2}}$

Soit $I=\int_{99}^{99\,e^{-\frac{t}{2}}} \frac{1}{u+1}\times\frac{1}{u}\times(-2\,du)$

On a alors : $\frac{1}{1+u}\times\frac{1}{u}=\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)$ soit

$$I=\int_{99}^{99\,e^{-2\frac{t}{2}}} -\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)du=2\left[-\ln(u)+\ln(1+u)\right]_{99}^{99\,e^{-\frac{t}{2}}}$$

$$=2\left(\ln\left(1+99\,e^{-\frac{t}{2}}\right)-\ln\left(99\,e^{-\frac{t}{2}}\right)+\ln(99)-\ln(100)\right)$$

Quand t tend vers $+\infty$, $99\,e^{-\frac{t}{2}}$ tend vers 0. Donc pour calculer la limite de $\frac{I}{t}$ en $+\infty$, il suffit de rechercher la limite de $2\,\frac{-\ln\left(99\,e^{-\frac{t}{2}}\right)}{t}$, les autres termes étant de limite finie.

Soit la limite de $2\,\frac{-\ln(99)+\frac{t}{2}}{t}$, donc 1

Exercice I

1. $f_{(1,1)}(x)=x^2-2\,x+2$ $\quad f_{(1,1)}(y)=1-2\,y+2\,y^2$
2. On a z en vertical, x en horizontal et y en profondeur.
3. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2\,x-2\,y$ $\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-2\,x+4\,y$

   $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$=2 $\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$=4 $\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}$ = -2
4. $\cdot\, df=(2\,x-2\,y)\,dx+(-2\,x+4\,y)\,dy$
5. Le gradient de f en (1,1) est le vecteur (0;2)

   On calcule le gradient pour les points (-1;-1) à (1;1) et on détermine le coefficient directeur $\frac{dy}{dx}$ de chaque vecteur.
6. La figure 1 indique les courbes de niveau, la figure 2 le champ de gradient.
7. On a f(1,1)=1, donc $dx=x-1$, $dy=y-1$, et $dz=z-1$. On remplace dans la différentielle totale et on obtient :

   $z-1=0(x-1)+2(y-1)$ soit l'équation du plan : 2y-z=1
8. Il faut rechercher les points critiques pour lesquelles les dérivées partielles s'annulent :

   $\begin{cases}2\,x-2\,y=0\\ -2\,x+4\,y=0\end{cases}$.

   On trouve $x=0$ et $y=0$.

   On a alors : $D\equiv f_{xx}(x^*,y^*)\,f_{yy}(x^*,y^*)-f_{xy}(x^*,y^*)^2=4>0$

   Comme $f_{xx}(x^*,y^*)>0$, f atteint un minimum local en $(0,0)$.