

# Cours V : Analyse numérique

## Interpolation et Résolution d'équation

### I Interpolation

**Objectif :** Étant donné un ensemble de couples  $(x_i, y_i)$  (résultats expérimentaux, par exemple), le problème consiste à trouver un modèle mathématique (polynomial, trigonométrique, exponentiel, etc.) afin de décrire les données au moyen d'une expression mathématique utilisable, c'est à dire calculable, intégrable, dérivable, etc.

**Il existe deux approches :**

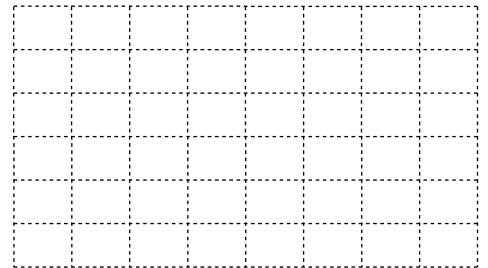
- Le modèle est vérifié pour tous les doublets → interpolation
- Le modèle est optimisé entre tous les doublets → lissage, régression

#### 1/ Interpolation linéaire

**Définition :** Entre deux valeurs successives des abscisses,  $x_i$  et  $x_{i+1}$ , la courbe est approchée par une application affine.

**Propriété :** On considère deux points de coordonnées  $(x_a, y_a)$  et  $(x_b, y_b)$ ,  $x_a < x_b$ . L'interpolation linéaire consiste à remplacer, pour tout  $x$  entre  $a$  et  $b$ ,  $f(x)$  par :

$$y_a + \frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a} \times (x - x_a)$$



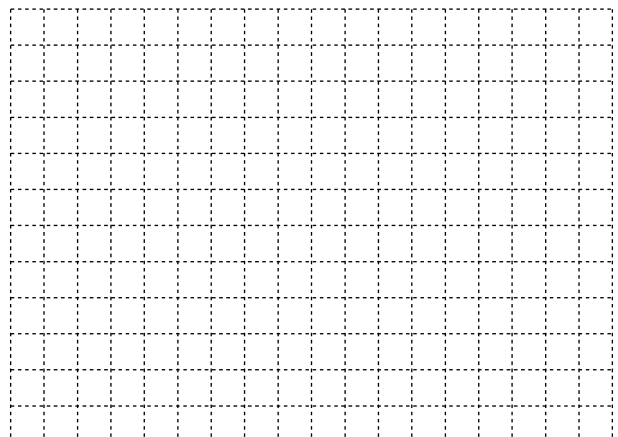
Démonstration

**Remarque :** Pour une valeur de  $x$  extérieure à  $[a, b]$ , on parle d'extrapolation.

**Exemple :** On met dans un réfrigérateur un récipient contenant de l'eau tiède et on mesure la température de l'eau. Les résultats sont 42°C à 8h, 22°C à 9h et 15°C à 10h.

- a. Représenter graphiquement les résultats.
- b. Calculer par interpolation linéaire la température attendue à 9h45.

```
(%i1) xy: [[9, 42], [10, 22], [11, 15]];
(%i5) load(interpol);
(%i6) lagrange(xy);
(%i7) P(x) := ' '%;
```



## 2/ Interpolation polynômiale

### a. Généralités

**Théorème de WEIERSTRAUSS :** Toute fonction continue peut être approchée uniformément par un polynôme.

**Propriété :** Soit une suite de  $n$  couples  $(x_i, y_i)$ , il existe un unique polynôme de degré  $(n-1)$  passant par les  $n$  points.

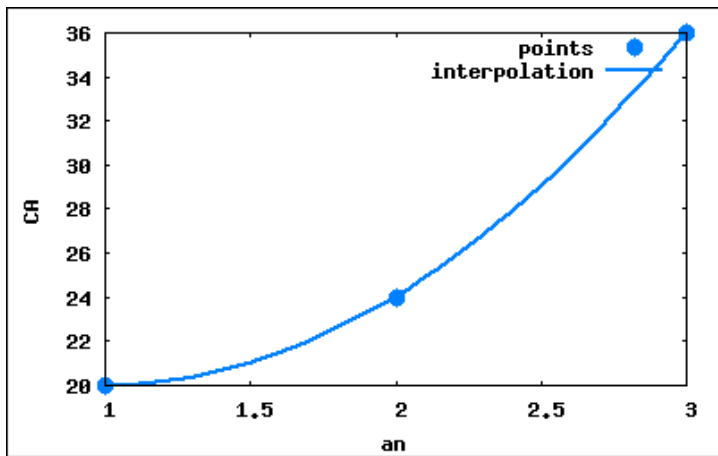
**Définition :** L'interpolation polynômiale consiste à approcher une fonction  $f$  dont on connaît  $n$  points par un polynôme de degré  $(n-1)$ .

**Exemple :** Le chiffre d'affaire annuel d'une entreprise est donné dans le tableau suivant:

Rang de l'année	1	2	3
CA en millions d'euros	20	24	36

Déterminer le polynôme d'interpolation de cette fonction.

```
(%i39) xy: [[1,20], [2,24], [3,36]]
(%i39) lagrange(xy)
      ou (%i46) linsolve([a+b+c=20, 4*a+2*b+c=24, 9*a+3*b+c=36], [a,b,c]);
(%i39) P(x) := ''%
(%i39) wxplot2d([[discrete,xy], P(x)], [x,1,3], [style,[points,3,1], [lines,2,1]],
[legend,"points","interpolation"], [xlabel,"an"], [ylabel,"CA"]];
```



### b. Polynôme d'interpolation de Lagrange

**Principe :** Dans la pratique, au lieu d'utiliser la base  $1, x, x^2 \dots$  des polynômes, on utilise

la base des polynômes de Lagrange :  $L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_j - x_i}$

Ces polynômes de degrés  $n-1$  vérifient  $L_i(x_j) = 1$  si  $i=j$  et  $0$  si  $i \neq j$ .

On en déduit alors le polynôme d'interpolation de Lagrange :  $P(x) = \sum_{i=1}^n y_i L_i(x)$

**Application pour n=3 :** On dispose de trois points  $(a,y_a)(b,y_b)(c,y_c)$ . Le polynôme d'interpolation de Lagrange est alors :

$$P(x) = y_a \frac{(x - c)(x - b)}{(a - b)(a - c)} + y_b \frac{(x - a)(x - c)}{(b - a)(b - c)} + y_c \frac{(x - a)(x - b)}{(c - a)(c - b)}$$

**Erreur :** On montre que lorsque  $f$  est deux fois dérivable, l'erreur commise  $\epsilon$  vérifie :  
 $\epsilon \leq (b-a)^3 \max_{[a,b]} |f'''(x)|$

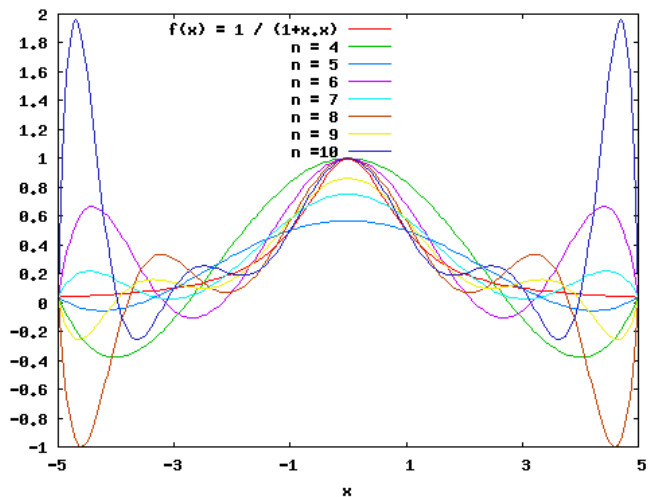
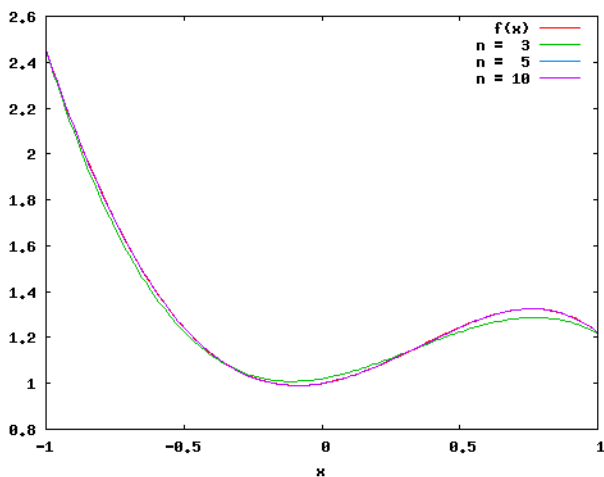
**Exemple :** Reprendre l'exemple précédent et retrouver le polynôme d'interpolation.

**c. Commentaires**

L'erreur commise dépend de :

**- la fonction initiale**

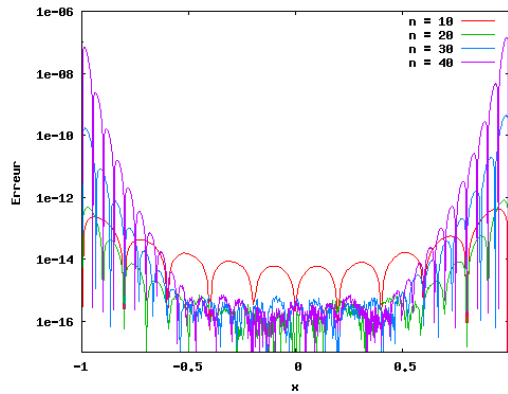
On peut observer sur les deux exemples ci-dessous avec  $f(x)=(1+x^2-x^3)exp(x/5)$  et  $g(x)= 1/(1+x,x)$  que le polynôme a de bonnes propriétés pour la première mais pas pour la seconde. En général, on ne connaît pas la fonction réelle.



**- du nombre de points n utilisés**

A priori, plus ce nombre est grand plus le degré du polynôme est important et plus la précision devrait être grande. Pour des degrés d'interpolation *trop grands*, le polynôme d'interpolation comportera en fait

des oscillations importantes au voisinage des bornes de l'intervalle d'interpolation. Ces oscillations, d'autant plus amples que le degré d'interpolation augmente, vouent invariablement toute tentative d'interpolation par un polynôme de degré *trou élevé* à un échec retentissant. Ce résultat s'appelle le **phénomène de Runge**.



**- de la répartition de ces points sur l'intervalle [a,b].**

Le choix des points dans l'intervalle est important. L'équirépartition n'apporte pas les meilleurs résultats et on lui préférera les points de Gauss, solution du polynôme de Tchebychev de degré (n+1).

**Remarques :** Il existe de nombreux résultats sur l'interpolation. Il est possible d'utiliser d'autres fonctions que les polynômes pour interpoler la fonction. Il est préférable également de découper l'intervalle initial en intervalle plus petit sur lesquels on interpole la fonction par des polynômes de faible degré. C'est le principe des **fonctions splines**.

**3/ Lissage et Régression**

Expérimentalement, on cherche souvent à représenter une relation fonctionnelle entre deux grandeurs en lissant cette courbe (nuage de points).

Ainsi, on *choisit* une fonction  $g(x)$  censée représenter  $f(x)$  puis on définit un critère d'ajustement comme le critère des moindres carrés. On en déduit alors les coefficients de la fonction  $g(x)$ .

Exemple : **critère des moindres carrés** :  $\sum_{i=1}^n (y_i - g(x_i))^2$

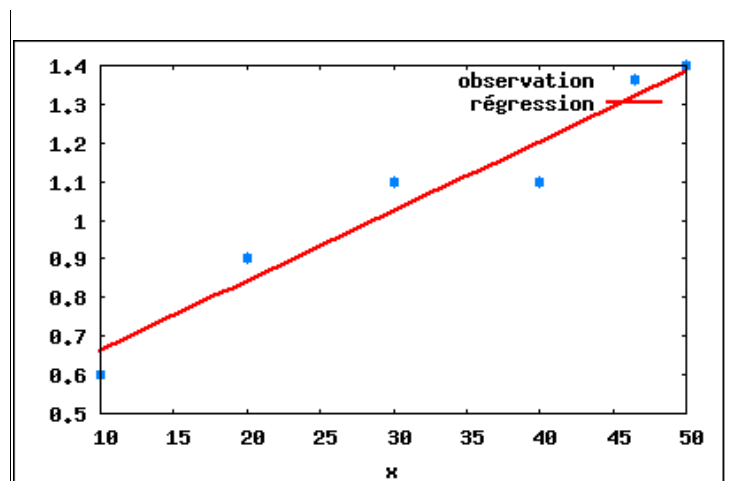
Sous certaines hypothèses, cette méthode permet une interprétation statistique (modèle de régression linéaire et non linéaire).

```
(%i53) xy:[[10,.6],[20,.9],[30,1.1],
[40,1.1],[50,1.4]]

(%i61) load(stats)

(%i62) z:simple_linear_regression(xy)

[model=0.018*x+0.48]
[correlation=0.96490128135401]
[v_estimation=0.008]
[b_conf_int=[0.009,0.027]],
[hypotheses=H0: b = 0 [statistic=6.36]
[distribution=[student_t,3]]
[p_value=0.003]]
```



```
(%i62) wxplot2d([[discrete, xy],take_inference(model,z)], [x,10,50], [style, [points,2,1]
, [lines,2,2]], [legend, "observation", "régression"])
```

## II Résolution d'équation

De nombreux problèmes mathématiques aboutissent à une équation de la forme  $f(x)=0$  ou  $g(x)=f(x)$  (*optimisation...*). Dans la pratique, c'est équation ne sont généralement pas résoluble algébriquement et nécessite un calcul approché.

### 1/ Généralités

**Définition d'un point fixe** : Soit une fonction numérique  $f(x)$ . On appelle point fixe de  $f$  tout réel  $x$  vérifiant  $f(x)=x$ .

**Remarque** : Une équation de la forme  $f(x)=0$  peut se ramener à une équation de la forme  $g(x)=x$  avec  $g(x)=f(x)+x$  par exemple.

**Théorème 1 du point fixe** : Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I=[a,b]$ . Si  $f(I)$  est inclus dans  $I$  alors  $f$  admet au moins un point fixe dans  $I$ .

**Théorème 2 du point fixe** : Soit  $f$  une fonction continue et dérivable sur un intervalle  $I=[a,b]$ . Si

- $f(I) \subset I$
- $\exists k \in \mathbb{R}$  tel que  $0 \leq k < 1$  et  $\forall x \in I$   $|f'(x)| < k$

alors

- $f$  admet au moins un point fixe  $\alpha$  dans  $I$ ,
- pour tout  $x_0$  de  $I$ , la suite définie par  $u_0=x_0$  et  $u_{n+1}=f(u_n)$  converge vers  $\alpha$ ,  $\alpha \in I$ .

## 2/ Dichotomie, balayage, Lagrange

### Méthode par dichotomie :

Soit une fonction  $f$  continue admettant une unique solution de l'équation  $f(x)=0$  sur un intervalle  $I=[a,b]$ .

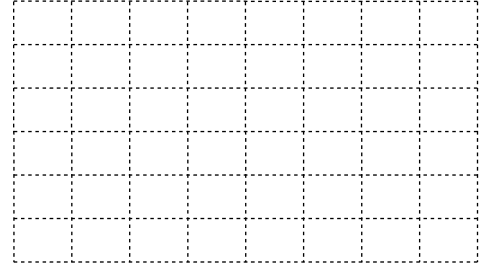
On a donc :  $f(a) \times f(b) < 0$ . On pose  $a_0=a$  et  $b_0=b$ .

On calcule  $f()$  puis le signe de  $f(a) f()$

Si  $f(a) f() < 0$ , alors la solution appartient à  $[a, ]$  et on pose  $a_1=a$  et  $b_1=$

Sinon on pose  $a_1=$  et  $b_1=b$

On continue jusqu'à avoir  $\frac{(b-a)}{2^n}$  inférieur à la précision souhaitée.



### Méthode par balayage :

Soit une fonction  $f$  continue admettant une unique solution de l'équation  $f(x)=0$  sur un intervalle  $I=[a,b]$ .

On a donc :  $f(a) \times f(b) < 0$ .

On construit une suite  $a_0=a$   $a_1=a+$   $a_2= a+ 2 \times \dots$   $a_{10}=b$  puis on calcule  $f(a_i)$ .

On détermine l'intervalle  $[a_i, a_{i+1}]$  sur lequel la fonction change de signe.

On reitère l'algorithme sur  $[a_i, a_{i+1}]$  jusqu'à avoir  $\frac{(b-a)}{10^n}$  inférieur à la précision souhaitée.

### Méthode de Lagrange :

Soit une fonction  $f$ , continue sur un intervalle  $[a;b]$  telle que  $f(a)$  et  $f(b)$  soient de signe contraire.

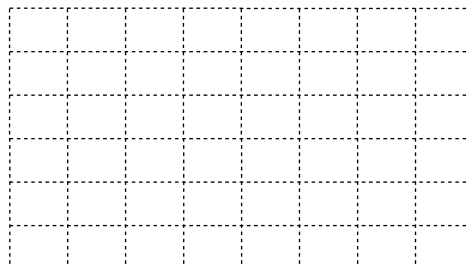
On pose  $a_0=a$  et  $b_0=b$ .

On calcule par interpolation linéaire la solution approchée  $x_0$  de  $f(x)=0$ .

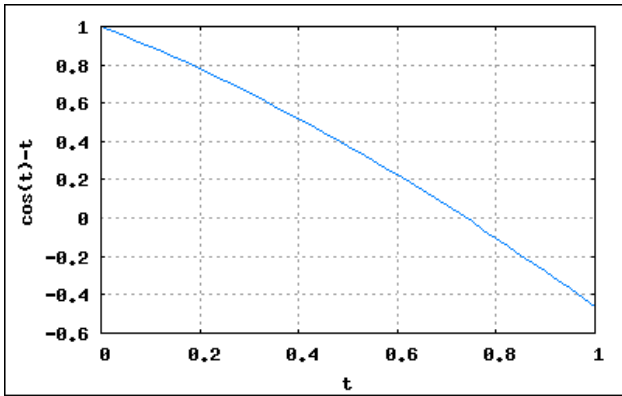
On obtient  $x_0 =$

On calcule alors  $f(x_0)$  et si  $f(a) \times f(x_0) < 0$  on pose  $a_1=a$  et  $b_1=x_0$  sinon  $a_1=x_0$  et  $b_1=b$ .

On continue ainsi jusqu'à avoir  $b_n - a_n$  inférieur à la précision souhaitée.



**Exemple :** Résoudre l'équation  $\cos(x)=x$  sur  $[0,1]$  à  $10^{-3}$  près avec chacune des méthodes. Préciser le nombre de calculs de chaque méthode.



```
(%i125) find_root(cos(t)=t, t, 0, 1);
(%o125) 0.73908513321516
```

### 3 Résolution d'une équation $f(x)=0$ par la méthode de Newton

**a. Approche empirique : une équation historique (Newton, vers 1670) :**  $x^3 - 2x - 5 = 0$   
Etudier les solutions de l'équation.

On propose une racine approximative  $u_0 = 2$ . Quel est le résultat ?

$u_0=2$  semble proche de la solution exacte, notée  $\alpha$ . Soit  $e$  l'écart. On pose  $\alpha = 2 + e$ .  
Remplacer  $x$  par  $u_0+e$  dans l'équation, puis négliger les termes  $e^2$  et  $e^3$ .

En déduire une nouvelle approximation de  $\alpha$ , que nous noterons  $u_1$ :

Reprendre le **c.** mais en remplaçant  $x$  par  $u_1+e$  dans l'équation.

En déduire une relation de récurrence entre  $u_n$  et  $u_{n+1}$ .

Proposer une méthode d'approximations successives de  $\alpha$  faisant intervenir  $f(u_n)$  et  $f'(u_n)$ .

Pourrait-on envisager une autre équation du type  $g(x)=x$

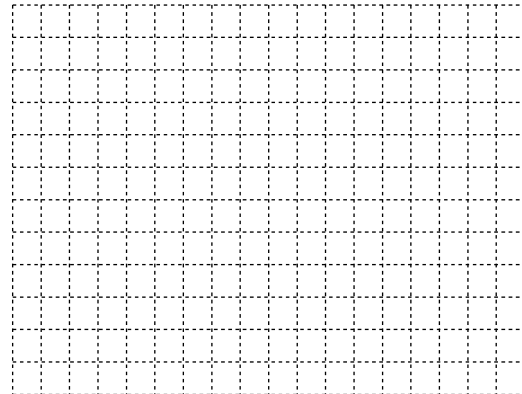
**b. Approche géométrique.**

Soit une fonction  $f$  continue et dérivable sur un intervalle  $[a,b]$  telle que  $f(a)f(b) < 0$ .

1. Tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse  $x_0$  que vous choisirez à bon escient.

Cette tangente coupe l'axe des abscisses en  $x_1$ .  $x_1$  est une première valeur approchée de  $\alpha$ , solution de  $f(x)=0$ . Dans la pratique, il faut choisir le point de départ A pour que graphiquement la tangente coupe bien l'axe des abscisses entre  $x=a$  et  $x=b$ .

2. On repart du point  $(x_1 ; f(x_1))$  et on procède de la même façon. On obtient ainsi  $x_2$ . On arrive très vite à une valeur approchée de  $\alpha$ .



**Propriété :** Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur l'intervalle  $[a,b]$  tel que

- $f(a) \times f(b) < 0$
- $f'(x)$  et  $f''(x)$  ne s'annule pas sur  $[a,b]$

La suite  $u_n$  définie par  $u_0 \in [a,b]$  et  $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$  converge vers l'unique solution  $\alpha$  de l'équation  $f(x)=0$ .

**Exemple :** Justifier l'intérêt de la fonction  $u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{2}{u_n}}{2}$  avec  $u_0=1$  pour le calcul de .

```
(%i44) f(x) := 0.5*(x+2/x)
(%i45) v[0]= 1
(%i45) v[n]=f(v[n-1])
(%i59) wxplot2d([discrete,makelist(k,k,0,10),makelist(u[k],k,0,10)], [style,points]);
(%i59) wxplot2d([f(x),x,[discrete,[v[0],0],[v[0],v[1]],[v[1],v[1]],[v[1],v[2]],[v[2],v[2]],[v[2],v[3]],[v[2],v[3]],[v[3],v[3]],[v[3],v[4]]]], [x,0.5,2],[y,0.5,2]);
```

