

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I Définition et notation

Définition 1 : On appelle dérivée seconde de $f''(x)$ la dérivée de $f'(x)$, elle-même dérivée de $f(x)$. On définit ainsi la dérivée d'ordre n de f , notée $f^{(n)}$.

Définition 2 : Une équation différentielle d'ordre n est une équation où l'inconnue est une fonction $f(x)$ et qui fait intervenir la dérivée d'ordre n de f et éventuellement x , $f(x)$ et les dérivées intermédiaires.

Exemple : Equation différentielle du 1^{er} ordre :

Equation différentielle du 2nd ordre :

Notation En écriture différentielle, on note $f'(x) =$

En fait, pour simplifier l'écriture des équations différentielles:

- les fonctions sont souvent symbolisées par des lettres: x, a, y pour $x(t), a(t), y(t)$
- la variable est notée soit t soit x : y et a seront interprétés comme $y(t), a(t)$ ou $y(x), a(x)$
- on peut être mené à utiliser l'écriture différentielle: $y' =$ ou $y' =$ et $y'' =$

Exemple : Réécrire de façon simplifiée les équations différentielles précédentes :

Exemples d'équations différentielles

- L'équation $y' = ay$ modélise l'évolution de n'importe quelle quantité y dont la variation instantanée est proportionnelle à y .
- En physique, comme : (1) $L + Ri = e(t)$
- En chimie, comme: (2) $=kc$ et $=k(a-x)(b-x)$ (cinétique de premier et deuxième ordre)
- En dynamique de population : (3) $=kP(K-P)$ (croissance d'une population en condition limitée)
- En médecine: (4) $=-kQ + Dk_a e^{-k_a t}$ (concentration plasmatique d'un médicament)

Le problème est alors de trouver les fonctions $i(t), c(t) \dots$ vérifiant l'équation.

Définitions :

- Résoudre une équation différentielle d'ordre n sur un intervalle I , c'est **trouver toutes les fonctions dérivables n fois** sur I solution de l'équation.
- Quand ces solutions ont toutes la même forme, $k \times e^x$ par exemple avec k réel quelconque, on peut donner cette forme générale appelée **solution générale de l'équation** (seul k varie d'une solution à l'autre).

Remarque : Dans les cas simples du type $y' = g(x)$, les solutions sont toutes les primitives de $g(x)$.

II Equations à variables séparables

Il s'agit des équations où on peut séparer ce qui concerne y , y' , ... d'un côté de l'équation et ce qui concerne x de l'autre.

Exemples

1. $y'y = 1$ 2. $y'y^2 = x$ 3. $y' = y^2$ 4. $y' = y + y^2$

Contre-exemple : $y' = \sin(xy)$

Méthode générale de résolution

- L'équation s'écrit :

$$y'g(y) = f(x) \text{ avec } f \text{ et } g \text{ deux fonctions d'une variable.}$$

- Si on connaît une primitive G de g , et une primitive F de f , alors l'équation équivaut à

$$G(y) = F(x) + C$$

Une fonction f , définie sur un intervalle I , est solution de l'équation différentielle si et seulement si il existe une constante C telle que pour tout x dans I , on a $G(f(x)) = F(x) + C$

Exemple : Résoudre si cela est possible les équations 1 à 4 par cette méthode.

Remarque : Attention, il ne suffit pas de mettre les y y' à gauche et les x à droite, il faut que la partie gauche soit vraiment sous forme $y\theta g(y)$. Par exemple, l'équation 3 pourrait s'écrire $y' - y = 0$, on a bien les y à gauche, mais ça n'est pas sous la bonne forme, on ne sait pas résoudre ainsi (il n'y a pas de formule générale pour une primitive de $y' - y$).

III EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU PREMIER ORDRE $a(t) x' + b(t) x = c(t)$

1/ Définitions

Définition 1: Soit un intervalle I de \mathbb{R} et $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ trois fonctions continues sur I .

Soit une fonction $y(t): I \rightarrow \mathbb{R}$

On dit que y est une solution de l'équation différentielle linéaire de premier ordre: $(E) ay' + by = c$ ssi :

- y est dérivable sur I
- pour tout t de I , y vérifie (E) .

On note S_I l'ensemble des solutions de (E) sur I .

Définition 2:

- Résoudre (E) sur I c'est trouver toutes les solutions sur I .
- On appelle courbe intégrale de E les courbes représentatives des solutions de (E) .
- L'équation $(E) y' + by = c$ où $a=1$ est dite normalisée.
- L'équation $(E_0) ay' + by = 0$ est appelée équation sans second membre.

2/ Solution générale de l'équation différentielle sans second membre $ay' + by = 0$

Théorème : Soit l'équation différentielle $y' + ay = 0$ avec a une fonction continue sur I . La solution générale de cette équation sur I est :

$$y_0 = k x e^{-A(t)} \quad \text{où } A(t) \text{ est une primitive de } a(t) \text{ sur } I \text{ et } k \text{ un réel quelconque.}$$

Démonstration:

Remarque 1: Si l'équation initiale est de la forme $ay' + by = 0$, on divise l'équation par $a(t)$ pour $a(t)$ non nul et on retrouve $y' + y = 0$. On cherche alors une primitive de .

Remarque 2: Si a est un réel, on a immédiatement la solution générale ke^{-at}

Exemple : Résoudre sur \mathbb{R} : (E1) $x' - 2x = 0$ (E3) $y' + xy = 0$ et sur $]0; +\infty[$ (E3) $xy' - y = 0$

2/ Résolution de l'équation avec second membre

Théorème : La solution générale de l'équation différentielle $(E) ay' + by = c$ s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation sans second membre $(E0) ay' + by = 0$ **une solution particulière de l'équation (E).**

Démonstration:

Exemple : Résoudre $(E4) y' - 2y = 1 - 2x$ et $(E5) y' - 2y = e^{-x}$ (sol. part. de la forme: λe^{-x})

3/ Méthode de variation de la constante

Méthode de variation de la constante:

Etape 1 : Trouver la solution générale de $(E0) a(t) x' + b(t) x = 0$, soit $y_0 = k e^{-G(t)}$

Etape 2 : Pour trouver une solution particulière ϕ de (E) on pose $\phi(t) = z(t) e^{-G(t)}$ (on remplace la constante k par une fonction $z(t)$) et on recherche $\phi(t)$ solution particulière de (E) . On remplace alors ϕ et ϕ' par cette fonction dans (E) et on détermine $z(t)$. On a $\phi' = (z'(t) - z(t) G'(t)) e^{-G(t)}$.

Etape 3 : La solution générale de (1) est alors $y = k e^{-G(t)} + \phi(t)$ avec k réel

Exemple : Résoudre $(E6) y' + x y = x^2 e^{-x}$

4/ Problème de cauchy

Une fois la solution générale de l'équation différentielle déterminée, il est souvent nécessaire de trouver la solution y vérifiant certaines conditions initiales. Cette recherche est appelé le problème de Cauchy.

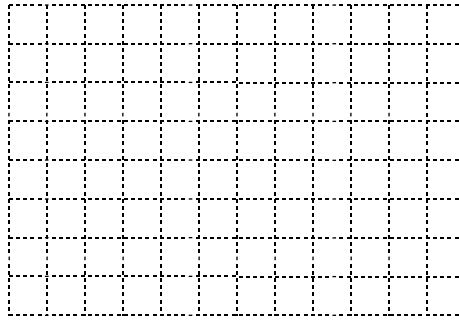
Théorème: Soit I un intervalle de \mathbb{R} . a et b deux fonctions continues sur I . Il existe une solution et une seule vérifiant l' e.d. $y' + ay = b$ et $y(x_0) = y_0$

Exemple : Trouver la solution de $(E3)$ vérifiant $y(0)=1$ et la solution de $(E6)$ vérifiant $y(0)=-1$

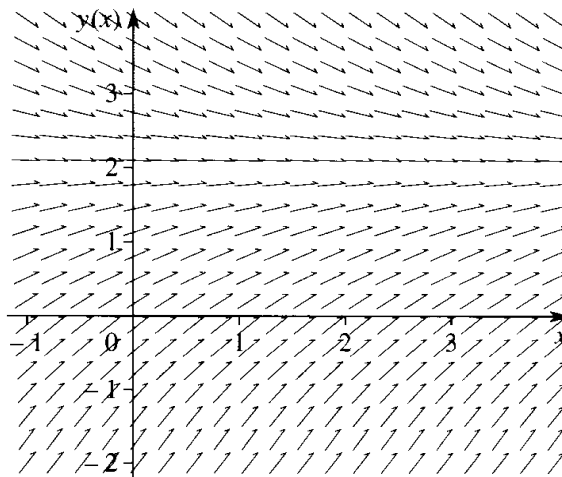
4/ Courbe intégrale

Construction d'un champ de tangente :

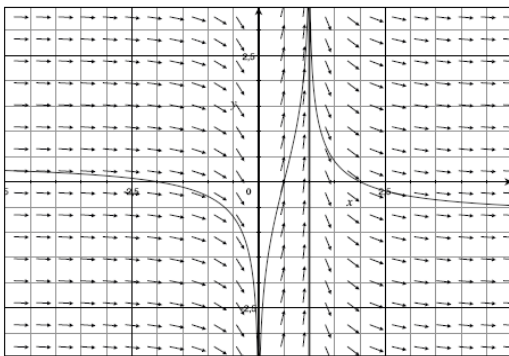
$$y' = y - x$$



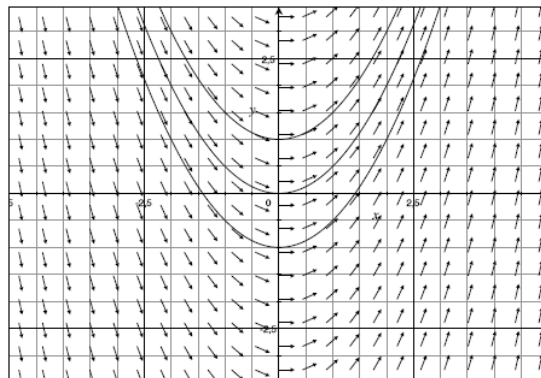
Construction d'une solution particulière: Le champ de tangentes d'une équation différentielle est représenté ci-dessous. Tracer les courbes intégrales vérifiant la solution particulière $y(0) = -$ puis $y(0) = 3$.



Exemple de champs de tangente avec courbes intégrales

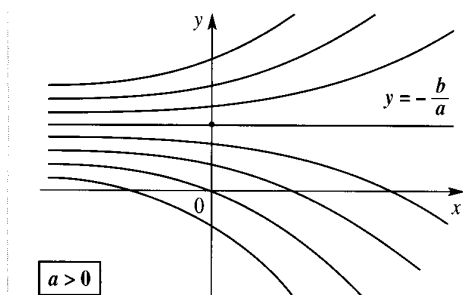


$$y' = \frac{1}{x}$$

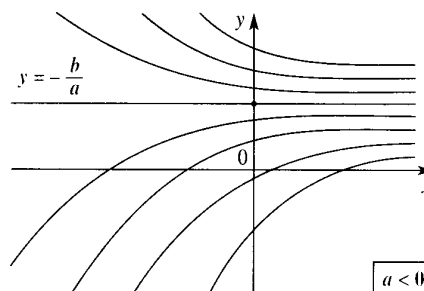


$$y' = x$$

Exemple : Courbes intégrales d'une équation différentielle $y' = ay + b$, a et b constants



$$a > 0$$



$$a < 0$$

III Equations Linéaires du second ordre à coefficients constants: $ay'' + by' + cy = d$

On cherche à résoudre sur I les e.d. $ay'' + by' + cy = d$ avec a, b, c trois réels et d une fonction continue sur I .

1/ Résolution de l'équation sans second membre

Propriété: Soit l'équation (E_0) $ay'' + by' + cy = 0$, a, b et c trois réels.

On appelle équation caractéristique de cette équation différentielle l'équation : $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

Trois cas sont possibles:

- **Si $\Delta > 0$** , on note λ_1 et λ_2 les racines du polynôme.

La solution générale de (E_0) est alors : $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, C_1 et C_2 étant 2 réels

- **Si $\Delta = 0$** , on note λ_0 la racine double du polynôme.

La solution générale de (E_0) est alors : $(C_1 x + C_2) e^{\lambda_0 x}$, C_1 et C_2 étant 2 réels

- **Si $\Delta < 0$** , on note $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ les 2 racines complexes du polynôme.

La solution générale de (E_0) est alors : $(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)) e^{\alpha x}$, C_1 et C_2 étant 2 réels

Démonstration:

Exemples: Résoudre (E1) $y'' + 3y' + 2y = 0$
 $y'' + y' + y = 0$

(E2) $y'' + 2y' + y = 0$

(E3)

2/ Solution de l'équation différentielle avec second membre.

Propriété: La solution générale de l'équation :

$$ay'' + by' + cy = d, \text{ avec } a, b, c \text{ réels et } d \text{ une fonction continue sur } I$$

est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation sans second membre:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

3/ Problème de Cauchy

Théorème: L'équation $ay'' + by' + cy = d$ possède une unique solution vérifiant la condition initiale:
 $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$

Exemple: Résoudre $y'' + y = x^2 + 2$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$

IV Résolution approchée d'une équation différentielle

1/ Méthode d'Euler

Pour h proche de 0, on a $y(a+h) \approx y(a) + h y'(a)$.

Nous allons utiliser cette approximation affine pour construire pas à pas une fonction vérifiant une équation différentielle du premier ordre et passant par un point donné (x_0, y_0) .

Soit l'équation différentielle définie par $y'=f(x,y)$ et les conditions initiales (x_0, y_0) .

En (x_0, y_0) , on connaît la pente de la tangente à partir de l'équation différentielle, $f(x_0, y_0)$

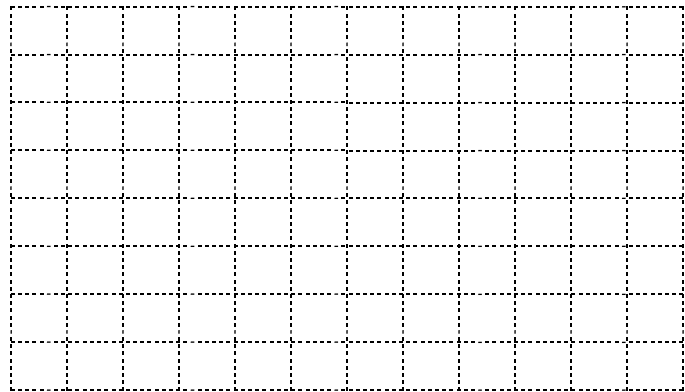
On assimile alors sur l'intervalle $[x_0, x_0+h]$ la fonction à sa tangente.

On détermine alors le point (x_1, y_1) avec $x_1=x_0+h$ et $y_1= y_0+h f(x_0, y_0)$

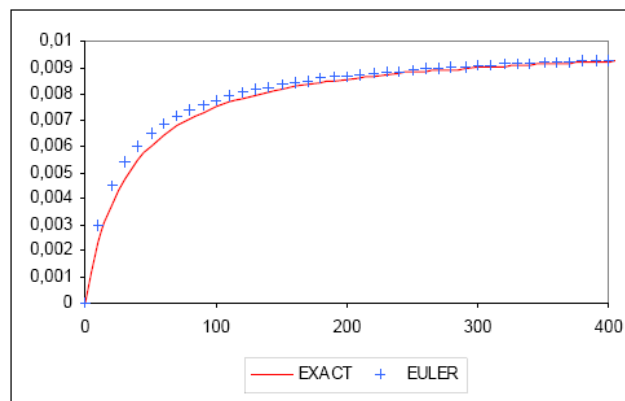
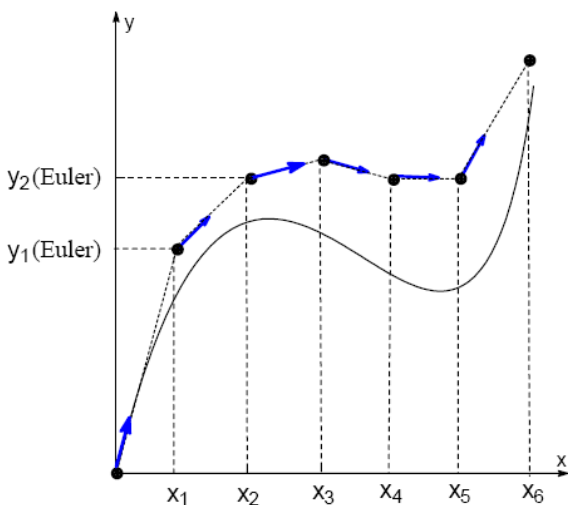
On recommence le même raisonnement avec le point (x_1, y_1) .

On poursuit en construisant la suite de points (x_n, y_n) et en assimilant la courbe à une application affine par morceau.

Exemple : Construire la courbe intégrale de $y'+y=x$ vérifiant $y(0)=0$ avec un pas $h=0.5$.



Remarque : La convergence de la méthode est de l'ordre de .



$$\frac{dx}{dt} = k \times (a - x)^2$$

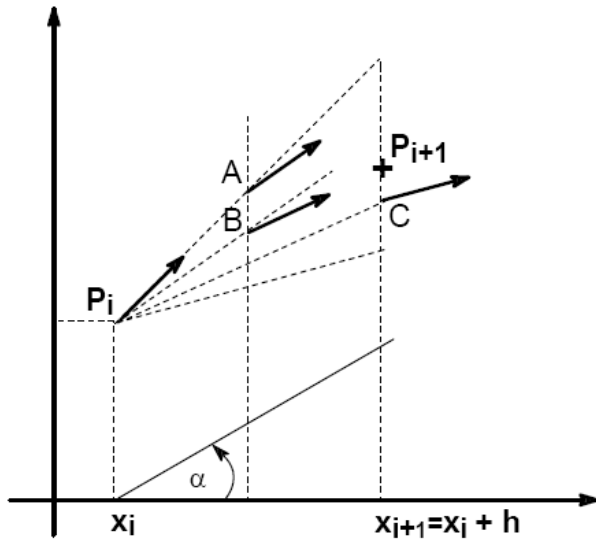
2/ Méthode de Runge Kutta

Soit l'équation différentielle définie par $y'=f(x,y)$ et les conditions initiales (x_0,y_0) .

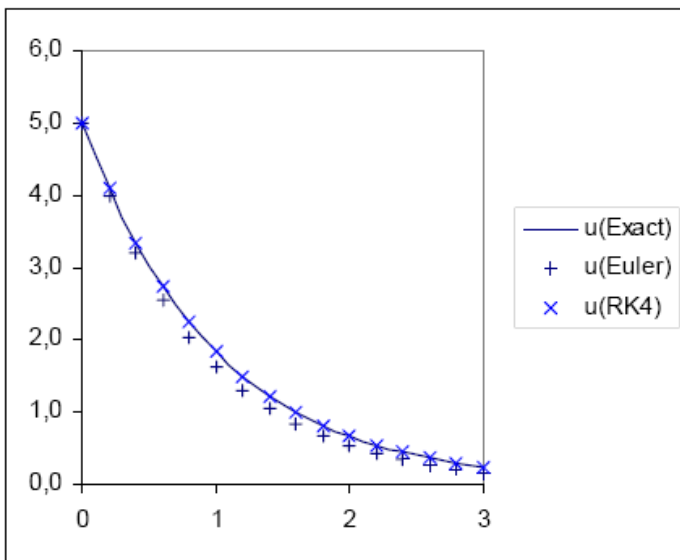
La méthode de Runge Kutta d'ordre 4 (la plus classique) est définie par la suite de points (x_n,y_n) vérifiant :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(k_1 + 4k_2 + k_3) / 6 \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + h/2, y_n + hk_1/2) \\ k_3 = f(x_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2) \end{cases} \quad \text{et } x_{n+1} = x_n + h$$

Cette méthode améliore notablement la convergence du calcul, de l'ordre de



$$\text{tg}\alpha = \frac{1}{6} \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)_i + 2 \times \left(\frac{dy}{dx} \right)_{iA} + 2 \times \left(\frac{dy}{dx} \right)_{iB} + \left(\frac{dy}{dx} \right)_{iC} \right]$$



$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{RC} u$$