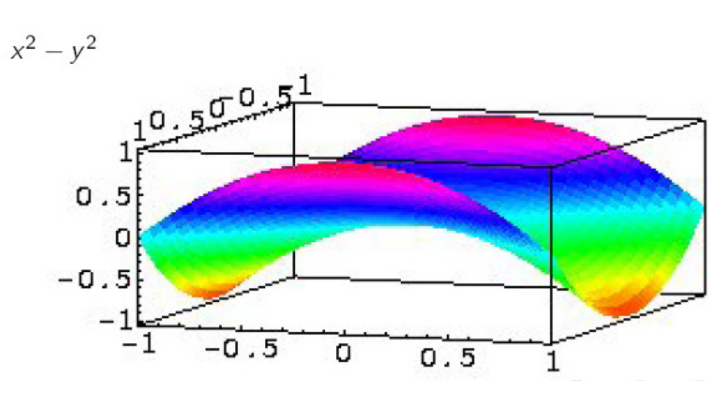
Fonctions réelles de plusieurs variables

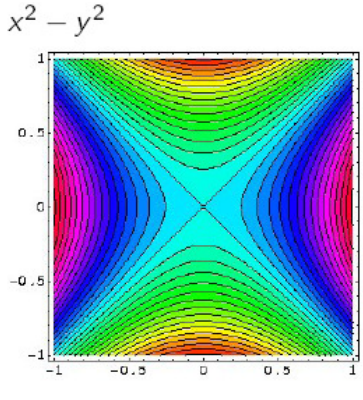
Jusqu'à présent les fonctions étudiées se limitaient aux fonctions réelles à variables réelles. Dans de nombreux problèmes, nous devons décrire le comportement d'une variable en fonction de plusieurs variables. Par exemple, l'aire d'un rectangle dépend de sa longueur et de sa largeur. En économie, nous décrivons souvent la relation entre la quantité produite par une firme comme une fonction de plusieurs facteurs de production (travail, capital).
Nous allons étudier ici des fonctions de plusieurs variables réelles x, y,…, notée $f(x,y)$ ou $f(x,y,z)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^2$). La terminologie et les notations pour les fonctions de deux ou plusieurs variables est similaire à celle introduite pour les fonctions d'une seule variable. Par exemple, l'expression $z = f(x, y)$ signifie que z est une fonction de x et de y (variables).

Exemple 1 : Soit la fonction f définie par $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.
b. Calculer $f(0.5,0.5)$, $f(1,0)$, $f(0,1)$.
c. Déterminer le maximum de f.
d. Comment représenter graphiquement l'ensemble des points $z=f(x,y)$?

Exemple 2 : Représentation graphique de $f(x,y)=x^2-y^2$





Comme pour l'étude des fonctions réelles à valeurs réelles, l'étude des fonctions à plusieurs variables impliquent de définir des propriétés intéressantes de ces fonctions telles la notion de limite, la continuité, la dérivabilité, les notions d'intégrales, de maximum, de développement limité ….
Ces propriétés sont naturellement plus compliquées mais se ramènent à ce que nous connaissons dans $\mathbb{R}$.
Par ailleurs, l'étude des fonctions à deux variables se généralisent immédiatement à celles de plus de deux variables. Aussi nous nous limiterons à des fonctions de la forme $z=f(x,y)$, x, y, z réels.

I Limite - Continuité

La définition théorique de la limite et de la continuité implique de définir des notions de distance dans $\mathbb{R}^2$ (plus généralement de topologie) qui rendent plus difficiles. On peut utiliser la distance euclidienne classique entre deux points de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Nous nous limiterons ici à une présentation très intuitive suffisante pour appréhender les notions sur les fonctions régulières classiques.

Limite : Une fonction $f(x,y)$ admet une limite a en (x_0,y_0) si lorsque (x,y) tend vers (x_0,y_0), $f(x,y)$ tend vers a.

Le problème ici est que (x,y) est défini dans deux dimensions et nous pouvons nous rapprocher de (x_0,y_0) non plus seulement par la droite et par la gauche, mais aussi par le haut, le bas …. Les démonstrations deviennent alors plus difficiles. Dans la pratique, on ne sait travailler facilement (et encore) que dans une dimension pour calculer les limites, définir la continuité, la dérivabilité ….

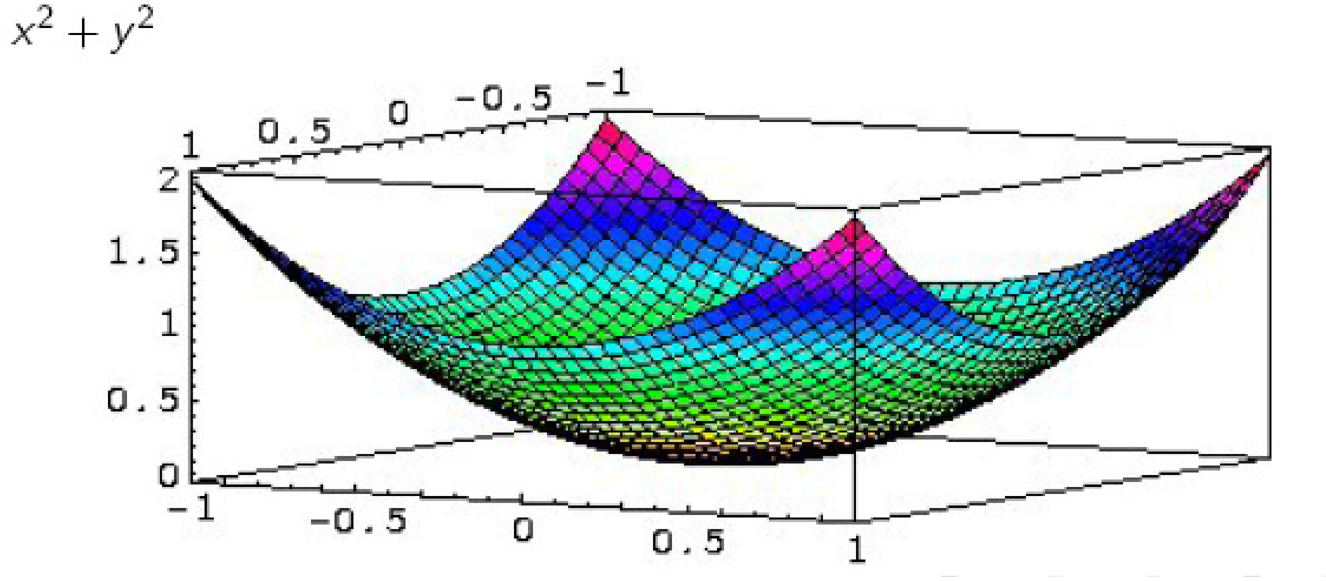
Continuité : Une fonction $f(x,y)$ est dite continue en (x_0,y_0) si lorsque (x,y) tend vers (x_0,y_0), $f(x,y)$ tend vers $f(x_0,y_0)$.

Applications partielles : Soit une fonction $(x,y) \rightarrow f(x,y)$.
On appelle application partielle de f en (x_0,y_0), les applications f_1 et f_2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

f_1: x $\rightarrow$ $f_1(x,y_0)$ et f_2: y $\rightarrow$ $f_2(x_0,y)$

Si f est continue alors ses applications partielles le sont (réciproque fausse).

Exemple : Calculer les applications partielles de $f(x,y)= x^2+y^2$ en (0,0) et (1,1).



II Dérivées partielles – Calcul différentiel

1/ Dérivées suivant un vecteur. Dérivées partielles

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.Soit $\vec{h}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $a(x_0\,;y_0)$ un point de U.
On définit la fonction φ_h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\varphi_h(t)=f(a+t\vec{h})$.
Si φ_h est dérivable en 0, on dit que f admet une dérivée première en a suivant le vecteur $\vec{h}$.
On note $D_{\vec{h}}f(a) = \varphi'_h(0)= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+t\vec{h})-f(a)}{t}$

Définition : On appelle dérivées partielles premières de f en a par rapport à x et par rapport à y (si elle existent) les dérivées partielles premières de f en a suivant les vecteurs $\vec{i}(1\,;0)$ et $\vec{j}(0\,;1)$. On les note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) \text{ ou } f_x(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a) \text{ ou } f_y(a)$$

Si f admet en tout a de U des dérivées partielles premières, on appelle fonctions dérivées partielles premières les fonctions qui à tout a associent $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$, on les notent alors $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$

Calcul pratique : Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, on dérive $f(x,y)$ par rapport à x ou y en posant y constant et x constant respectivement .

Ex : Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour $f(x\,;y) = 2x^2+3xy+y^2$ et $f(x\,;y)=xe^y$

2/ Applications de classe C^1

Définition : Si f admet de dérivées partielles continues sur U, f est dite de classe C^1.

Propriétés des fonctions de classe C^1 :

- f admet en tout point a de U une dérivée suivant tout vecteur non nul $\vec{h}(h_1\,;h_2)$ et
  - $D_{\vec{h}}f(a)=\frac{\partial f}{\partial x}(a)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\,h_2$
- f admet un développement limité au voisinage de tout point a de U et
  - $f(a+t\vec{h})=f(a)+tD_{\vec{h}}f(a)+t\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) =0$

Exemple : Calculer la dérivée en *a(1 ;1)* suivant $\vec{h}(2\ ;1)$ de f de ℝ² dans ℝ définie par $f(x,y)=x^2-y^2+xy$
En déduire un valeur approchée de *f(1,02 ;1,01).*

3/ Gradient et différentielle

Soit un ouvert *U* de R². Soit *f* une fonction de classe C^1 sur *U* à valeur réelle.

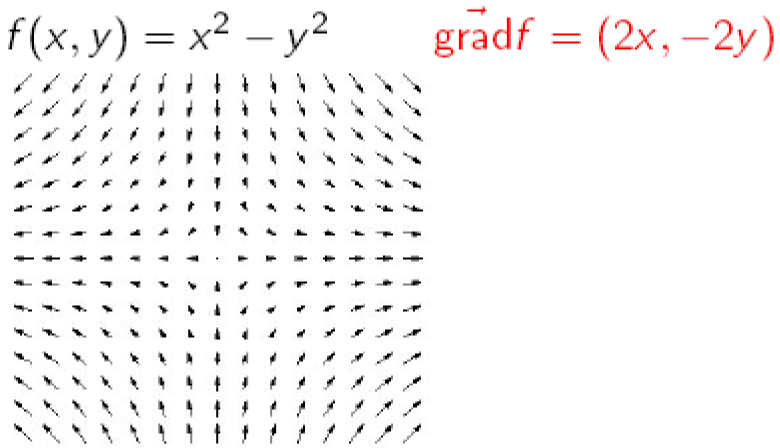
Définition : On appelle gradient de *f* en *a*, notée $\overrightarrow{grad}\,f(a)$ le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a)\ ,\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$.

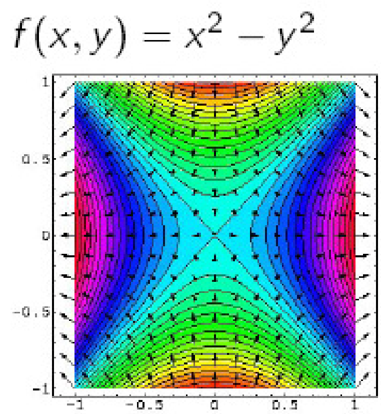
On définit ainsi l'application gradient de *f* qui à tout point a de *U* associe $\overrightarrow{grad}\,f(a)$. On a :

$$\overrightarrow{grad}f\left(\frac{\partial f}{\partial x}\ ;\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Le gradient est une fonction de ℝ² dans ℝ² (champ de vecteur) Il indique la direction dans laquelle la quantité *f* varie le plus vite, et la vitesse de cette variation
Il est extrêmement utilisé en physique: gradient de concentration, de température, de pression...

Exemple : Calculer le gradient de $f(x,y)=x^2-y^2$ *en (1,1)*





Exemple : Déterminer $\overrightarrow{grad}$f pour $f(x\ ;y)=3x^2+2xy$ et sa valeur en (1,1).

Définition :

On appelle différentielle de f en a l'application notée $df(a)$:
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (h_1\,;h_2) & \to & \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\,\mathrm{h}_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\,\mathrm{h}_2 \end{array}$$

On a ainsi $D_{\vec{h}}f(a)$ égal au produit scalaire de $\overrightarrow{grad}\,f(a)$ par $\vec{h}$.

Si f admet une différentielle en tout a de U, f est dite différentiable sur U.

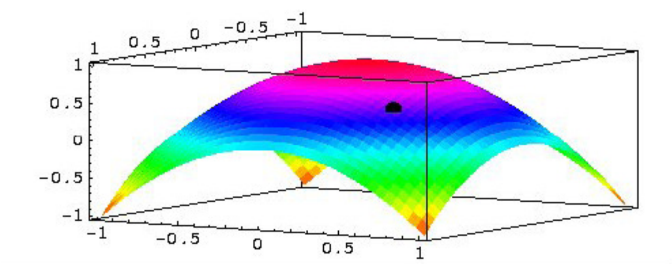
On appelle différentielle totale de f l'application $df=\dfrac{\partial f}{\partial x}\,dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}\,dy$.

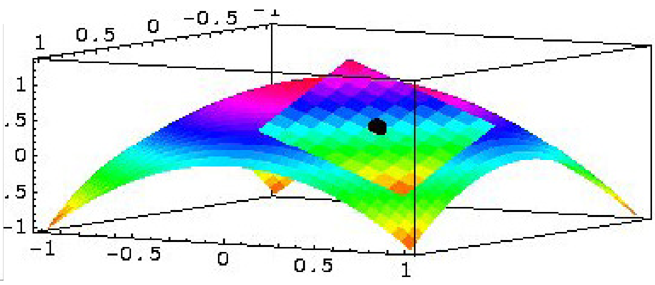
En physique, df ; dx ; dy représentent des accroissements infinitésimaux de f, x et y.

Exemple : Déterminer df pour $f(x\,;y)=3x^2+2xy$.

Interprétations géométriques : Soit la surface S définie par $z=f(x\,;y)$. On appelle courbe de niveau la courbe définie par $f(x,y)=\lambda$.

- En tout point de U, $\overrightarrow{grad}f$ est normal aux lignes de niveaux
- En posant $df=z-z_0$ $dx=x-x_0$ et $dy=y-y_0$, le plan défini par l'équation $df=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0\,;y_0)\,dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0\,;y_0)\,dy$ est le plan normal à S au point $(x_0\,;y_0\,;z_0=f(x_0\,;y_0))$.





4/ Dérivées d'ordre supérieures

Définition : Si les dérivées partielles sont elles même dérivables, on peut définir alors les dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}(a)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a)\right)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}(a)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a)\right)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$$

On note également ces fonctions $f_{xx}(a)$, $f_{yy}(a)$ $f_{xy}(a)$ et $f_{yx}(a)$.

Exemple : Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de $f(x,y)=x^2-y^2+2xy$

5/ Dérivée de fonctions composées

Propriété 1: Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à valeur réelle.
On suppose de plus que pour tout réel t de I $(u(t)\,;v(t)) \in U$
Alors la fonction g définie sur I par $g(t)= f(u(t)\,;v(t))$ est de classe C^1 et :

$$g'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(u(t);v(t))\,u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t);v(t))\,v'(t) \text{ ou } \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} =$$

Ex : soit $g(t)=f(t^2\,;t+2)$. *Calculer* $g'(t)$.

Remarque : On généralise cette propriété pou une fonction G de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ avec $G(x\,;y)=f(u(x,y)\,;v(x,y))$
On a alors :

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Application : Etude de l'application $G(\rho,\theta) = f(x\,;y) = e^{-x^2-y^2}$ *(passage aux coordonnées polaires)*

III Applications

1/ Courbes de niveau

Pour une fonction du type $z = f(x, y)$, nous pouvons rechercher l'ensemble des points (x, y) qui engendrent un niveau de z fixé égal à λ. En dimension 2, la courbe qui décrit l'ensemble de ces points pour un niveau λ donné est appelée courbe de niveau pour la valeur donnée λ.

Pour l'ensemble des valeurs (x, y) qui vérifient $f(x, y) =\lambda$ nous pouvons définir la fonction

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda$$

qui sera toujours identiquement nulle. Donc, en utilisant la différentielle de F, nous obtenons
$dF = 0$, lorsque $f(x, y) = \lambda$, que l'on note aussi $dF_{|z=\lambda} = 0$.

Ainsi, nous avons $dF_{|z=\lambda} = df_{|z=\lambda} - 0 = 0$

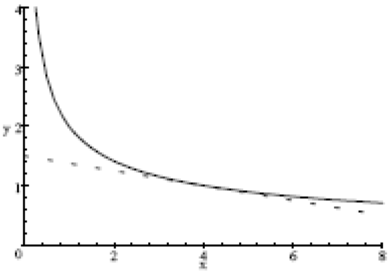
En un point (x_0, y_0) donné où $f(x_0, y_0) = \lambda$, nous avons $df = fxdx + fydy$ d'où nous déduisons :

$$f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dy = 0 \quad \text{lorsque } z = \lambda$$

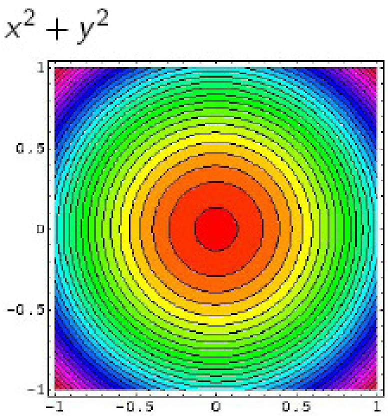
soit encore $\frac{dy}{dx}_{|z=\lambda} = f_x(x_0, y_0)/f_{y(}(x_0, y_0)$

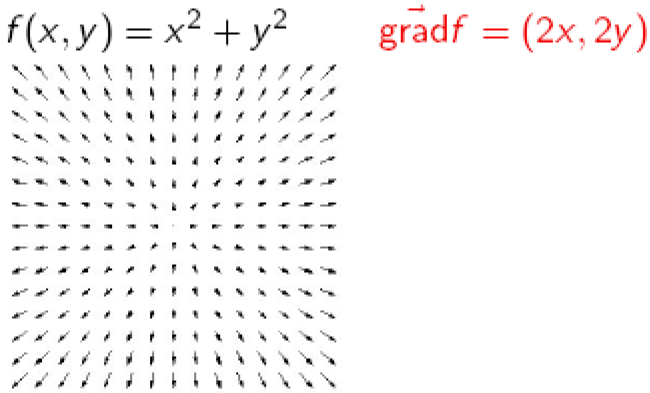
Nous pouvons interpréter $\frac{dy}{dx}_{|z=\lambda}$ comme la pente de la tangente à la courbe de niveau où $z =\lambda$.

Exemple. Considérons la fonction $f(x, y) = \sqrt{x} \times y$. Déterminer la courbe de niveau en 2 et calculer la pente de la tangente à la courbe de niveau donnée par $f(x, y) = 2$ au point (4, 1).



Exemple Déterminer la courbe de niveau définie par $f(x,y)=\lambda$ avec $f(x,y)=x^2+y^2$.





2/Extrema

Propriété 1: Soit une fonction f de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}$
Si f présente un extrema en a alors son gradient s'annule en a (les dérivées partielles sont nulles en a).
La réciproque est fausse.

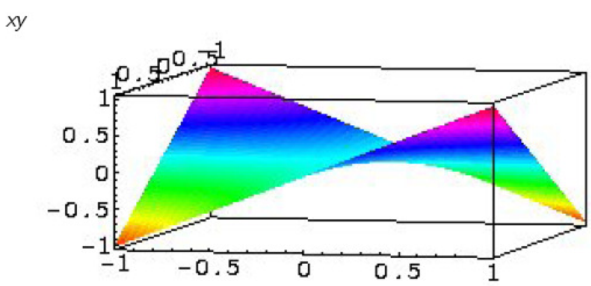
Définition : Un point (x,y) vérifiant $f_{xx}(x, y)=0$ et $f_{yy}(x, y=0)$ s'appelle un point critique.

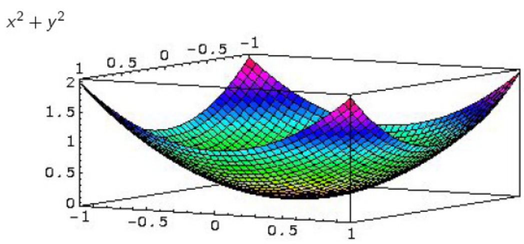
Propriété 2: Si une fonction de deux variables $f(x,y)$ admet un point critique en (x^*, y^*), on définit :

$$D \equiv f_{xx}(x^*, y^*)\, f_{yy}(x^*, y^*) - f_{xy}(x^*, y^*)^2 .$$

On a

1. Si $D > 0$, et $f_{xx}(x^*, y^*) > 0$, $f(x,y)$ admet un minimum local en (x^*, y^*).
2. Si $D > 0$, et $f_{xx}(x^*, y^*) < 0$, $f(x,y)$ admet un maximum local en (x^*, y^*).
3. Si $D < 0$, $f(x,y)$ admet un point selle en $(x*, y*)$.
4. Si $D = 0$, aucune conclusion n'est possible.



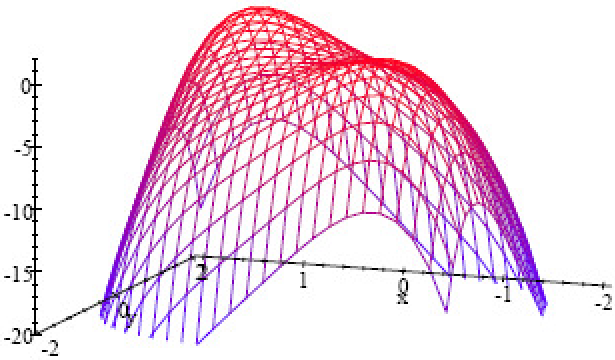


Exemple : Rechercher les extrema de $f(x,y)=x^4-2x^2y^2+2y^2$

Exemple : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ *par* $f(x,y)=4y-4x^3$.

a. Déterminer les points singuliers.

b. Correspondent-ils à des extremums ?



3/ Calcul d'incertitude

Méthode : Lorsque l'on calcul une grandeur $f(x,y,z)$ à partir de plusieurs mesures $x,y,z,$ l'utilisation de la différentielle permet de calculer l'incertitude sur cette grandeur $\Delta f=f(x,y,z)$ à partir des incertitudes sur x, y et z : Δx Δy Δz .

.
$$\Delta f=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta y+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z$$

1/ Les dimensions d'un parallélépipède rectangle sont a=50 ±0.05cm b=80 ±0.05cm et c=100 ±0.05cm. Calculer la surface et le volume attendus puis leurs incertitudes absolues et relatives.

2/ Un cylindre droit a pour dimension h=9.97±0.02cm et r=2,51±0.01cm.
Calculer la surface et le volume attendus puis leurs incertitudes absolues et relatives.