Hypersurfaces à singularités isolées quasi-homogènes

Kyoji Saito

(in Inventiones math. 14, 123-142, 1971)

(Traduction de l'article + ajouts personnels entre crochets : [...])

(par Hélène Maynadier)

Introduction

Le résultat principal de ce travail est le théorème suivant :

Théorème

Soit $f \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$, ayant une singularité isolée en 0.[1]
S'il existe $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ tels que :

$$f = g_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + g_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

alors il existe un système de coordonnées locales dans lequel f est un polynôme quasi-homogène.[2]

(1) f définit une fonction holomorphe dans un voisinage U de l'origine 0 de $\mathbb{C}^n$. Soit X l'hypersurface $X = \{x \in U \,/\, f(x) = 0\}$. Si X a une singularité isolée en 0, f a, par définition, une singularité isolée en 0.

(2) La définition des polynômes quasi-homogènes est donnée au paragraphe 1 (cf définition 1.1.(i))

De plus, on montre que le type $(r_1, \dots, r_n)$ de ce polynôme quasi-homogène est déterminé par f (par l'intermédiaire de X) de manière unique, à permutation des r_i près.

Afin d'expliquer l'importance du théorème donné ci-dessus, j'aimerais mentionner la proposition suivante, qu'il permet d'obtenir à l'aide de résultats déjà connus :

Proposition

Soit $f \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ à singularité isolée.
Les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

a) il existe un système de coordonnées dans lequel f est un polynôme quasi-homogène,

b) l'hypersurface X des zéros de f est localement holomorphiquement contractile sur 0,

c) le complexe de Poincaré de X en 0

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{O}_{X,0} \xrightarrow{d} \Omega^1_{X,0} \xrightarrow{d} \Omega^2_{X,0} \to \dots \to \Omega^n_{X,0} \to 0$$

est exact,

d) il existe $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ tels que

$$f = g_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + g_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Preuve

a) $\Rightarrow$ b) : trivial

b) $\Rightarrow$ c) : prouvé par Reiffen dans [5]

c) $\Leftrightarrow$ d) : prouvé par Sebastiani dans [8] à l'aide des résultats de Brieskorn [2]

d) $\Rightarrow$ a) : c'est le résultat principal de ce travail.
Brieskorn (entre autres) l'avait conjecturé, et Reiffen l'a prouvé pour $n = 2$ dans [6]. $\square$

rmq : les singularités des polynômes quasi-homogènes ont des applications très intéressantes en topologie et topologie différentielle.
C'est pourquoi elles ont été étudiées par Brieskorn, Milnor et Orlik, entre autres. (cf p.ex. [2], [3], [4]).

Résumé du contenu de ce travail :

§1 – Introduction des polynômes quasi-homogènes et des séries entières faiblement quasi-homogènes

§2 – §3 Formes normales de germes d'opérateurs différentiels linéaires du premier ordre $D = g_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + g_n \frac{\partial}{\partial x_n}$.

Cette représentation n'est pas encore, je pense, la forme définitive, mais elle nous suffit.

A l'aide de cette forme normale, on montre que pour toute fonction propre d'un opérateur D, il existe un système de coordonnées dans lequel f est une série faiblement quasi-homogène.

Après cette étude préparatoire, on résout le problème essentiel au §4:

§4 : Caractérisation des hypersurfaces à singularités quasi-homogènes.

Dans les paragraphes 1 à 3, les calculs sont tous formels, mais à la fin du paragraphe 4, on utilise le théorème de M. Artin sur l'approximation analytique des solutions formelles ([1]), pour établir la convergence des changements de coordonnées cherchés.

---

§1 Polynômes quasi-homogènes et séries formelles faiblement quasi-homogènes

Dans ce paragraphe, on définit les polynômes quasi-homogènes et les séries faiblement quasi-homogènes, et on montre que toute série faiblement quasi-homogène à singularité isolée se transforme, par un changement de coordonnées formel convenable, en un polynôme quasi-homogène. (Proposition 1.3).

Définition 1.1

(i) Soit $(r_1, \dots, r_n)$ un n-uplet de rationnels tels que $0 < r_i \leq \frac{1}{2}$ $(i = 1, \dots, n)$.

Un polynôme $P \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ est dit quasi-homogène de type $(r_1, \dots, r_n)$ (abrégé en r Q.H.) si P est combinaison linéaire de monômes $x_1^{m_1} \times \dots \times x_n^{m_n}$ avec $r_1 m_1 + \dots + r_n m_n = 1$.

(ii) Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.
Une série formelle $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ est appelée "faiblement quasi-homogène de type $(\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$" (abrégé en : F.Q.H.) si, pour tout monôme $x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$ de f (i.e. qui apparaît avec un coefficient non nul),
$$\alpha_0 = \alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_n m_n .$$

Naturellement, un polynôme Q.H. est, par définition, F.Q.H.

Dans la suite, R désigne un anneau isomorphe à $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$.
On désigne par $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal d'un anneau local.

Définition 1.2

Soit $f \in \mathfrak{M} \subset R$,
$x_1, \ldots, x_n \in R$ un système de coordonnées de R.
f a une singularité isolée à l'origine si elle vérifie la condition suivante (qui ne dépend pas du choix du système de coordonnées) :
si $\mathfrak{a}$ désigne l'idéal engendré par $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$,
$\exists\, \rho \in \mathbb{N} \;/\; \mathfrak{M} \supset \mathfrak{a} \supset \mathfrak{M}^\rho$.

Proposition 1.3

Soit $f \in \mathfrak{M}$, F.Q.H. de type $(\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, avec $\alpha_0 \neq 0$ et $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, \ldots, n$, dans un système de coordonnées $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
On suppose que f a une singularité isolée à l'origine.
Alors il un système de coordonnées $u = (u_1, \ldots, u_n)$ dans lequel f est un polynôme Q.H. de type $(r_1, \ldots, r_k, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$ (avec $0 < r_i < \frac{1}{2}$, $i = 1, \ldots, k$), à savoir de la forme :
$$f = h + u_{k+1}^2 + \ldots + u_n^2 ,$$
où $h \in \mathbb{C}[u_1, \ldots, u_k] \subset R$ est un polynôme Q.H. de type $(r_1, \ldots, r_k)$ qui – vu comme élément de l'anneau $\mathbb{C}[[u_1, \ldots, u_k]]$ – a une singularité isolée à l'origine, et dont l'ordre est ≥ 3.

Pour démontrer cette proposition, nous avons besoin de quelques lemmes préliminaires.

Lemme 1-4

Étant donné des complexes $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$,
il existe $(r_{j_0}; r_j) = (r_{j_0}; r_{j_1}, \ldots, r_{j_n}) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^n$, $j = 1, \ldots, k$, tels que

(1) $f \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ est F.Q.H. de type $(\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ssi
$\forall j = 1, \ldots, k$, f est F.Q.H. de type $(r_{j_0}; r_{j_1}, \ldots, r_{j_n})$.

(2) Il existe d'uniques $c_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, k$, tels que
$$(\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = c_1 (r_{1_0}; r_1) + \cdots + c_k (r_{k_0}; r_k).$$

Preuve

Soit $\mathbb{Q}\alpha_0 + \mathbb{Q}\alpha_1 + \cdots + \mathbb{Q}\alpha_n \subset \mathbb{C}$ le $\mathbb{Q}$-ev engendré par les α_i.
Soit $\{c_1, \ldots, c_k\} \subset \mathbb{C}$ une base de cet ev sur $\mathbb{Q}$.
Tous les α_i $(i = 0, \ldots, n)$ pouvant s'écrire comme combinaisons linéaires à coefficients rationnels des c_j, il existe $(r_{j_0}; r_j) = (r_{j_0}; r_{j_1}, \ldots, r_{j_n}) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^n$, $j = 1, \ldots, k$, tels que $(\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = c_1(r_{1_0}; r_1) + \cdots + c_k(r_{k_0}; r_k)$.
Ce sont les r_{j_0} et r_j cherchés.

[f FQH de type $(\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f = \sum a_I x^I, \\ (*) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j i_j = \alpha_0 \quad \forall I \in \mathbb{N}^n \mid a_I \neq 0. \end{cases}$

$$(*) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{k} c_q r_{q,j} \right) i_j = \sum_{q=1}^{k} r_{q_0} c_q$$
$$\Leftrightarrow \sum_{q=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} r_{q_j} i_j \right) c_q = \sum_{q=1}^{k} r_{q_0} c_q$$
$$\Leftrightarrow \forall q = 1, \ldots, k, \quad \sum_{j=1}^{n} r_{q_j} i_j = r_{q_0} \quad \text{car } \{c_1, \ldots, c_k\} \text{ est une base}$$

CQFD]

? Il est clair que les c_j sont déterminés de manière unique une fois les r_{j_0} et r_j choisis.

[En effet :

Lemme 1.5

> Soit $f \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ à singularité isolée à l'origine.
> Soit $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ tel qu'il n'y ait pas de monôme $x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k}$ dans f.
> Alors pour au moins k indices j, $k+1 \leq j \leq n$, il y a un monôme de la forme $x_j . x_1^{m_{j,1}} \dots x_k^{m_{j,k}}$ dans f.

Preuve

D'après la condition sur $x_1, \dots, x_k$, $f(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = 0$.
On peut donc développer f sous la forme

$$f(x) = \sum_{j=k+1}^{n} g_j(x_1, \dots, x_k)\, x_j + h(x_1, \dots, x_n),$$

où h est une fonction de $x_{k+1}, \dots, x_n$ $\left(f \in \left(\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_k]]\right)[[x_{k+1}, \dots, x_n]]\right)$ d'ordre ≥ 2.

D'où

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{x_{k+1} = \dots = x_n = 0} = \begin{cases} 0 & \text{pour } j = 1, \dots, k \\ g_j & \text{pour } j = k+1, \dots, n. \end{cases}$$

Puisque f a une singularité isolée, l'idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_k]] \simeq \dfrac{\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]}{(x_{k+1}, \dots, x_n)}$ engendré par $g_{k+1}, \dots, g_n$ doit contenir une puissance de l'idéal maximal de $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_k]]$.

[f SI $\Rightarrow \exists\, l \in \mathbb{N} \,/\, \mathfrak{M}^l \subset (f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n}) \subset \mathfrak{M} \subset \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$.

Donc

$\forall j = 1, \dots, k, \quad x_j^{\,l} \in (f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n}) \subset \mathfrak{M}$

$\Rightarrow \forall j = 1, \dots, k, \quad x_j^{\,l} \in \left(f'_{x_1}(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0), \dots, f'_{x_n}(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)\right) \subset (x_1, \dots, x_k)$

$\Rightarrow \exists N \,/\, (x_1, \dots, x_k)^N \subset \left(f'_{x_1}(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0), \dots, f'_{x_n}(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)\right) \subset (x_1, \dots, x_k)$

($N = kl$ convient)]

D'après un théorème de Krull, le nombre de générateurs de $\mathfrak{a}$ doit être au moins égal à la dimension k de l'anneau $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_k]]$; c'est-à-dire que pour au moins k des j, $k+1 \leq j \leq n$, g_j doit être non nul.

[cf Matsumura - Commutative ring theory - p104 :
$(A, \mathfrak{M})$ anneau local noetherien de dimension r.
$\Rightarrow$ tout idéal $\mathfrak{M}$-primaire ne peut être engendré par moins de r éléments.

Ici : $(A, \mathfrak{M}) = (\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_k]], (x_1, \dots, x_k))$
$\mathfrak{M}^N \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{M}$ dans A $\Rightarrow$ $\mathfrak{a}$ est $\mathfrak{M}$-primaire]

$\square$

<u>Corollaire 1.6</u>

Soit $f \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ une série ayant une singularité isolée à l'origine.
$\forall j$, $1 \leq j \leq n$, l'une des propriétés suivantes est vérifiée :
(i) f contient un monôme x_j^m (pour un $m \in \mathbb{N}$)
(ii) f contient un monôme $x_j^m x_{j'}$, pour un $m \in \mathbb{N}$ et un $1 \leq j' \leq n$.

[<u>rmq</u> : Saito ajoute l'hypothèse "f F.Q.H.", qui est en fait inutile]

[<u>Preuve</u>
Soit j, $1 \leq j \leq n$,
- si $\exists$ un monôme x_j^m dans f, on a (i),
- sinon, on effectue une permutation des indices telle que $x_j \leftrightarrow x'_1$, et on considère $\tilde{f}(x'_1, \dots, x'_n) := f(x_1, \dots, x_n)$.
$\tilde{f}$ ne contient pas de monôme $x_1'^{m_1}$
$\Rightarrow$ par le lemme 1.5, $\exists$ au moins un ℓ, $2 \leq \ell \leq n$, tel qu'il y ait un monôme $x'_\ell \, x_1'^{m_1}$ dans $\tilde{f}$.
$\Rightarrow$ f contient un monôme $x_k \, x_j^m$ pour un $1 \leq k \leq n$, $k \neq j$.]

<u>Corollaire 1.7</u>

Soit P un polynôme Q.H., à la fois de type $r = (r_1, \dots, r_n)$ et $s = (s_1, \dots, s_n)$.
On suppose que P a une singularité isolée à l'origine.
Alors $r = s$ (ie $r_j = s_j$, $j = 1, \dots, n$).

Preuve

Soit $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ un monôme de P.

Puisque P est de types r et s, on a

$$r_1 m_1 + \dots + r_n m_n = 1 \quad \text{avec} \quad 0 < r_j \leq \tfrac{1}{2}\ ,\ j = 1, \dots, n$$

$$s_1 m_1 + \dots + s_n m_n = 1 \quad \text{avec} \quad 0 < s_j \leq \tfrac{1}{2}\ ,\ j = 1, \dots, n .$$

? D'après le corollaire 1-6, un nombre suffisant d'égalités est vérifié pour que le type soit déterminé de manière unique.

□

Corollaire 1-8

Soit f une série F.Q.H. de type $(\alpha_0 ; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, à singularité isolée à l'origine.
On suppose qu'il existe k, $1 \leq k \leq n$ tel que α_0 ne puisse s'écrire comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{N}$ des k premiers poids $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, sauf éventuellement $\alpha_0 = \alpha_i$ avec $1 \leq i \leq k$.
Alors, pour au moins k indices j compris entre $k+1$ et n, on a une écriture

$$\alpha_0 = \alpha_j + m_1 \alpha_1 + \dots + m_k \alpha_k \ , \ \text{avec } m_i \in \mathbb{N},\ i = 1, \dots, k, \quad (m_1, \dots, m_k) \neq (0, \dots, 0).$$

Preuve

Grâce au lemme 1.5, il suffit de montrer qu'aucun monôme en $x_1, \dots, x_k$ n'apparaît dans f. Mais à cause de la condition sur $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, il ne peut y avoir au plus qu'une combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_k$ dans f.
Si c'était le cas, on aurait $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_0 \neq 0$ pour certains i, $1 \leq i \leq k$, ce qui est impossible puisque f a une singularité à l'origine.

□

Corollaire 1-9

Soit $f \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ F.Q.H. de type $(1 ; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, ayant une singularité isolée à l'origine.
Alors

(i) $\forall \varepsilon > 0$ réel, $\#\{j \in \{1, \dots, n\} / \operatorname{Re} \alpha_j > 1 + \varepsilon\} = \#\{j \in \{1, \dots, n\} / \operatorname{Re} \alpha_j < -\varepsilon\}$.

(ii) $\#\{j / \alpha_j = 1\} = \#\{j / \alpha_j = 0\}$

(iii) Si les $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, alors $\{\alpha_j \notin [0,1]\}$ est symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$.

<u>Preuve</u>

(i) Quitte à renuméroter, on peut supposer que $\{j \,/\, \mathrm{Re}\,\alpha_j > 1+\varepsilon\} = \{1, \dots, k\}$.
Alors la condition du corollaire 1-8 est vérifiée par les $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.
Donc d'après ce corollaire, l'ensemble $\{j \,/\, \mathrm{Re}\,\alpha_j < -\varepsilon\}$ contient au moins k éléments.

[$\exists$ au moins k indices j tels que $1 = \alpha_j + m_1\alpha_1 + \dots + m_k\alpha_k$.

$1 = \mathrm{Re}\,\alpha_j + m_1 \,\mathrm{Re}\,\alpha_1 + \dots + m_k \,\mathrm{Re}\,\alpha_k > \mathrm{Re}\,\alpha_j + (m_1 + \dots + m_k)(1+\varepsilon)$

avec $m_1 + \dots + m_k \geq 1$

D'où $\mathrm{Re}\,\alpha_j < 1 - (1+\varepsilon) = -\varepsilon$]

De même, si on se ramène à $\{j \,/\, \mathrm{Re}\,\alpha_j < -\varepsilon\} = \{1, \dots, k'\}$,
on déduit du corollaire 1-8 que l'ensemble $\{j \,/\, \mathrm{Re}\,\alpha_j > 1+\varepsilon\}$ contient au moins k' éléments.

[D'où $k = k'$.]

(ii) Les arguments utilisés au (i) permettent d'établir que les ensembles
$A_1 = \{j \,/\, \mathrm{Re}\,\alpha_j > 1 \text{ ou } \alpha_j = 1\}$ et $A_2 = \{j \,/\, \mathrm{Re}\,\alpha_j < 0 \text{ ou } \alpha_j = 0\}$
admettent le même nombre d'éléments.
Ce résultat, et le (i), entraînent le (ii).

(iii) Se déduit de (i) et (ii) par une preuve indirecte

[f F.Q.H. de type $(1; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$
Soient $\omega_1, \dots, \omega_m$ les $\alpha_i \in \,]0,1[$ (variables $z_1, \dots, z_m$).
Les autres α_i : $\{\underbrace{1+r_1, \dots, 1+r_{\tilde{k}}}_{\geq 1}, \underbrace{-\rho_1, \dots, -\rho_{\tilde{\ell}}}_{\leq 0}\}$

avec $\tilde{k} + \tilde{\ell} + m = n$.

On suppose $0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_{\tilde{k}}$,
$0 \leq \rho_1 \leq \dots \leq \rho_{\tilde{\ell}}$.

1°) On a vu que $\tilde{k} = \tilde{\ell}$ (au (ii)).

2°) " " $\exists$ autant de $r_i = 0$ que de $\rho_j = 0$.

3°) Considérons donc les α_i dans $]-\infty; 0[\, \cup \,]1; +\infty[$,
$= \{1+r_1, \dots, 1+r_k, -\rho_1, \dots, -\rho_k\}$

avec $0 < r_1 \leq \dots \leq r_k$ et $r_1 = \dots = r_{\ell_1} < r_{\ell_1+1} = \dots = r_{\ell_1+\ell_2} < \dots < r_{\ell_1+\dots+\ell_{p-1}+1} = \dots = r_{\ell_1+\dots+\ell_p}$, et $0<\rho_1 \leq \dots \leq \rho_k$ avec $\rho_1 = \dots = \rho_{h_1} < \rho_{h_1+1} = \dots = \rho_{h_1+h_2} < \dots < \rho_{h_1+\dots+h_{q-1}+1} = \dots = \rho_{h_1+\dots+h_q}$

où $l_1 + \dots + l_p = h_1 + \dots + h_q = k$.

a) Montrons que $r_{l_1+\dots+l_p} = \rho_{h_1+\dots+h_q}$:

Si par exemple $r_{l_1+\dots+l_p} < \rho_{h_1+\dots+h_q}$,

$\#\{i / r_i > r_{l_1+\dots+l_p}\} = 0 = \#\{j / -\rho_j < -r_{l_1+\dots+l_p}\}$

$\Rightarrow -\rho_{h_1+\dots+h_q} \geq -r_{l_1+\dots+l_p}$

Contradiction

On montre de m. que l'on ne peut avoir $\rho_{h_1+\dots+h_q} < r_{l_1+\dots+l_p}$

CQFD

b) Montrons que $l_p = h_q$:

Soit $m = \max\{r_{l_1+\dots+l_{p-1}}, \rho_{h_1+\dots+h_{q-1}}\}$

$l_p = \#\{i / r_i > m\} = \#\{j / -\rho_j < -m\} = h_q$

CQFD

c) Montrons que $r_{l_1+\dots+l_{p-1}} = \rho_{h_1+\dots+h_{q-1}}$:

Si par exemple $r_{l_1+\dots+l_{p-1}} < \rho_{h_1+\dots+h_{q-1}}$

$\#\{i / r_i > r_{l_1+\dots+l_{p-1}}\} = l_p = h_q = \#\{j / -\rho_j < -r_{l_1+\dots+l_{p-1}}\}$

$\Rightarrow -\rho_{h_1+\dots+h_{q-1}} \geq -r_{l_1+\dots+l_{p-1}}$

Contradiction.

De même, on ne peut avoir $\rho_{h_1+\dots+h_{q-1}} < r_{l_1+\dots+l_{p-1}}$

CQFD

Etc...

Supposons par l'absurde que $p<q$. On aboutit à :

$(r_{l_1} =)\ r_1 = \rho_{h_1+\dots+h_{q-(p-1)}}$ et $l_1 = h_{q-(p-1)}$

Or $k = \ell_1 + \dots + \ell_p = h_{q-(p-1)} + \dots + h_q = k - (h_1 + \dots + h_{q-(p-1)-1})$

$\Rightarrow \quad h_1 + \dots + h_{q-p} = 0 \quad$ dans $\mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad h_1 = \dots = h_{q-p} = 0,$

ie pas de $\ell_j = \ell_1, \dots, = \ell_{q-p}$

CQFD

(idem si $q < p$).

□

Lemme 1.10

Soit f une série F.Q.H. de type $(1; \rho) = (1; 1+r_1, \dots, 1, r_k, -r_1, \dots, -r_k, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ (où $r_1 \geq \dots \geq r_k \geq 0$, $r_i \in \mathbb{R}$, et $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, \dots, m$) relativement à un système de coordonées $(x, y, z) = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_m)$.

On suppose que f a une singularité isolée à l'origine.

Alors il existe un système de coordonées $(x'_1, \dots, x'_k, y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_m)$ tel que f s'écrive sous la forme:

$$f = f_0(z) + x'_1 y_1 + \dots + x'_k y_k,$$

où f_0, comme élément de $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_m]]$, est un polynôme F.Q.H. de type $(1; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$, à singularité isolée à l'origine.

Preuve

Comme le montre la formule dans la preuve du lemme 1-5, f peut être développée de la manière suivante:

$$f(x, y, z) = g_1(x) y_1 + \dots + g_k(x) y_k + h(x, y, z),$$

où h, vue comme fonction de y et de z, est d'ordre ≥ 2.

[En effet, par hypothèse sur f,

$$f = \sum a_{I,J,L}\, x^I y^J z^L \quad \text{où} \quad \sum_{s=1}^{k} (1+r_s) i_s - \sum_{s=1}^{k} r_s j_s + \sum_{t=1}^{m} \alpha_t \ell_t = 1.$$

S'il y a un monôme tel que $J = (0, \dots, 0)$, il faut voir qu'il est d'ordre ≥ 2 en z.

- S'il est d'ordre 0 en z : $x_1^{m_1}\cdots x_k^{m_k}$, $\quad \sum \underbrace{(1+r_s)}_{\geq 1}\underbrace{m_s}_{\in \mathbb{N}} = 1$

Donc il y a une seule variable x_s, et $m_s = 1, r_s = 0$, ce qui est impossible puisque f est à S.I.

- S'il est d'ordre 1 en z : $x_1^{m_1}\cdots x_k^{m_k} z_j$,

avec $\sum \underbrace{(1+r_s)}_{\geq 1}\underbrace{m_s}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\alpha_j}_{0< \; <1} = 1$ impossible.]

Montrons tout d'abord que $\det \left.\dfrac{\partial(g_1,\dots,g_k)}{\partial(x_1,\dots,x_k)}\right|_{x=0} \neq 0$.

Supposons que l'on ait

$$r_1 = \dots = r_{k_1} > r_{k_1+1} = \dots = r_{k_1+k_2} > r_{k_1+k_2+1} = \dots > \dots > \dots = r_{k_1+\dots+k_q}$$

où $k_1+\dots+k_q = k$.

Puisque $g_i(x)y_i$ est F.Q.H. de type $(1;\rho)$, $g_i(x)$ est F.Q.H. de type $(1+r_i;\rho)$.

Pour cette raison, $g_{k_1+\dots+k_p+1},\dots,g_{k_1+\dots+k_p+k_{p+1}}$ dépendent linéairement de $x_{k_1+\dots+k_p+1},\dots,x_{k_1+\dots+k_{p+1}}$, et sont indépendantes de $x_1,\dots,x_{k_1+\dots+k_p}$, pour $p = 1,\dots,q-1$.

Il suffit donc de montrer que

$$C_p = \det \left.\frac{\partial(g_{k_1+\dots+k_p+1},\dots,g_{k_1+\dots+k_{p+1}})}{\partial(x_{k_1+\dots+k_p+1},\dots,g_{k_1+\dots+k_{p+1}})}\right|_{x=0} \neq 0,$$

pour $p = 0,\dots,q-1$.

[En effet,

$$\det \frac{\partial(g_1,\dots,g_k)}{\partial(x_1,\dots,x_k)} = \left|\begin{array}{ccc} \begin{matrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{k_1}} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_{k_1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{k_1}}{\partial x_{k_1}}\end{matrix} & & \\ 0 & \begin{matrix}\frac{\partial g_{k_1+1}}{\partial x_{k_1+1}} & \cdots & \frac{\partial g_{k_1+1}}{\partial x_{k_1+k_2}} \\ \vdots & & \vdots \\ & & \frac{\partial g_{k_1+k_2}}{\partial x_{k_1+k_2}}\end{matrix} & \\ 0 & 0 & \begin{matrix}\frac{\partial g_{k_1+\dots+k_{q-1}+1}}{\partial x_{k_1+\dots+k_{q-1}+1}} & \cdots & \frac{\partial g_{\dots}}{\partial x_k} \\ & & \vdots \\ & & \frac{\partial g_k}{\partial x_k}\end{matrix}\end{array}\right| \;]$$

Maintenant, rappelons-nous la preuve du lemme 1.5 : il s'ensuit que

$g_i(x_1,\dots,x_{k_1+\dots+k_{p+1}},0,\dots,0)$, $i=1,2,\dots,k_1+\dots+k_{p+1}$

doit être un système de paramètres de l'anneau local

$\mathbb{C}[[x_1,\dots,x_{k_1+\dots+k_{p+1}}]]$.

Par suite, c_p ne peut être nul, et on a

$$\det \left.\frac{\partial(g_1,\dots,g_k)}{\partial(x_1,\dots,x_k)}\right|_{x=0} = c_0 \dots c_{q-1} \neq 0 .$$

Le terme restant dans la formule donnée plus haut peut s'écrire sous la forme suivante :

$$h(x,y,z) = f_0(z) + h_1(x,y,z)\,y_1 + \dots + h_k(x,y,z)\,y_k ,$$

corollaire 1.9

où les h_i, vues comme fonctions de y et z, sont d'ordre ≥ 1.
Puisque les x_i sont déjà F.Q.H. de type $(1+r_i;\rho)$, le développement en série entière de h ne contient pas de monôme ayant un x_i en facteur, et ne dépendant que de x et de z.
Finalement, on obtient la formule suivante :

$$f(x,y,z) = f_0(z) + \sum_{i=1}^{k} \big(g_i(x) + h_i(x,y,z)\big)\,y_i .$$

[$\forall i=1,\dots,m,\ 0<\alpha_i<1 \Rightarrow f_0(z)$ est un polynôme].

Les $x_i' = g_i(x) + h_i(x,y,z)$, $i=1,\dots,k$, sont les nouvelles coordonnées cherchées.

[La transformation
$$\begin{aligned} x_i' &= g_i(x) + h_i(x,y,z) , & i &= 1,\dots,k \\ y_i' &= y_i , & i &= 1,\dots,k \\ z_j' &= z_j , & j &= 1,\dots,m \end{aligned}$$

a pour matrice jacobienne
$$\begin{array}{|c|c|c|} \ast & & \\ \hline 0 & \mathrm{Id} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{Id} \end{array}$$

$$\left.\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\right|_0 = \left.\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x,y,z)\right|_0 = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(0) + 0$$

donc la valeur de ce déterminant en $(0,0)$ est $\neq 0$.]

□

Preuve de la proposition 1.3

Soit $f \in \mathfrak{M} \subset R$ une série F.Q.H. de type $(\alpha_0; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ (avec $\alpha_0 \neq 0$), relativement à un système de coordonnées $x = (x_1, \dots, x_n)$.

On suppose que f a une singularité isolée à l'origine.

D'après le lemme 1.4, il existe un n-uplet de nombres rationnels $r = (r_1, \dots, r_n)$, et un nombre rationnel r_0, tels que f soit F.Q.H. de type $(r_0; r)$. En outre, d'après le lemme (1.4)(2), on peut supposer sans perte de généralité que $r_0 \neq 0$.

[car $\alpha_0 \neq 0$].

C'est dire que f est une série F.Q.H. de type $(1; r_1/r_0, \dots, r_n/r_0)$.

Puisque les r_i/r_0, $i = 1, \dots, n$, sont des réels, d'après le lemme 1.10 [que l'on peut appliquer, grâce au corollaire 1.9], f se transforme, par un changement de coordonnées convenable, en un polynôme F.Q.H. de type $(1; r'_1, \dots, r'_n)$, où les rationnels r'_i vérifient $0 < r'_i < 1$, $i = 1, \dots, n$.

Désormais, nous supposons que f est un polynôme F.Q.H. de type $(1; r_1, \dots, r_n)$, avec $r_i \in \mathbb{Q}$, $0 < r_i < 1$, $i = 1, \dots, n$.

Il faut encore montrer que s'il y a des r_i avec $\frac{1}{2} \leq r_i < 1$, il existe un changement de coordonnées formel, qui donne à f la forme souhaitée.

[Si tous les r_i sont compris strictement entre 0 et $\frac{1}{2}$, f est à SI d'ordre ≥ 3, et c'est bon.]

Supposons par exemple que $r_1 \geq \frac{1}{2}$. Il y a deux possibilités :

(i) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0$, [en 0 ?]

(ii) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = c \neq 0$, $c \in \mathbb{C}$

? Dans les deux cas, on peut facilement trouver une transformation telle que les termes linéaires en x_1 disparaissent, sans porter atteinte à la quasi-homogénéité de f.

? En répétant l'utilisation de telles transformations, on a la forme cherchée :

$$f = f_0(x_1, \ldots, x_k) + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2,$$

où $f_0 \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_k]$ est un polynôme Q.H. de type $(r_1, \ldots, r_k)$, avec $0 < r_i < \frac{1}{2}$, ayant une singularité isolée à l'origine. □

---

§ 2 Opérateurs semi-simples et nilopérateurs

Deux types d'opérateurs différentiels sont introduits dans ce paragraphe, les opérateurs semi-simples et les nilopérateurs, et on étudie leurs fonctions propres.

Soit R un anneau local, isomorphe à $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$.
Une application $D : R \to R$ est appelée opérateur différentiel (formel linéaire d'ordre 1) si D s'écrit, dans un système de coordonnées (et donc dans tout système de coordonnées), de la manière suivante :

$$D = g_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + g_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

(ie D est une dérivation), où nous demandons de plus que $g_1, \ldots, g_n \in \mathfrak{M} \subset R$.
Les g_i, $i = 1, \ldots, n$, sont appelés les coefficients de D (relativement à $x_1, \ldots, x_n$).
Si $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ sont deux systèmes de coordonnées,

$$D = g_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + g_n \frac{\partial}{\partial x_n} = g'_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + g'_n \frac{\partial}{\partial y_n},$$

alors

$$g'_i = D y_i = g_1 \frac{\partial y_i}{\partial x_1} + \cdots + g_n \frac{\partial y_i}{\partial x_n}.$$

En particulier, il s'ensuit pour la matrice jacobienne :

$$\left.\frac{\partial(g'_1,\dots,g'_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}\right|_0 = A \left.\frac{\partial(g_1,\dots,g_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\right|_0 A^{-1} \qquad (1),$$

où $$A = \left.\frac{\partial(y_1,\dots,y_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\right|_0 .$$

[Écriture de D dans deux systèmes de coordonnées :

. dans x

$$g_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + g_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

. dans y

$$g'_1(y)\frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + g'_n(y)\frac{\partial}{\partial y_n}.$$

Changement de coordonnées :

$y = \Phi(x)$: $y_1 = \varphi_1(x_1,\dots,x_n), \dots, y_n = \varphi_n(x_1,\dots,x_n)$.

Φ d'inverse Ψ.

cf DEA : $$\Phi\left(\sum_{i=1}^n g_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{i,j} g_i(\Psi(y))\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\Psi(y))\frac{\partial}{\partial y_j},$$

donc $$g'_j(y) = \sum_{i=1}^n g_i(\Psi(y))\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(\Psi(y)),$$

$$\frac{\partial g'_j}{\partial y_k}(y) = \sum_{i=1}^n\left[\left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_l}(\Psi(y))\cdot\frac{\partial \Psi_l}{\partial y_k}(y)\right)\cdot\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(\Psi(y)) + g_i(\Psi(y))\cdot\left(\sum_{l=1}^n\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_l}(\Psi(y))\cdot\frac{\partial\Psi_l}{\partial y_k}(y)\right)\right].$$

D'où $$\frac{\partial g'_j}{\partial y_k}(0) = \sum_{i=1}^n\left(\sum_{l=1}^n\frac{\partial g_i}{\partial x_l}(0)\cdot\frac{\partial\Psi_l}{\partial y_k}(0)\right)\cdot\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(0). \qquad (*)$$

A voir : cela donne (1) :

On a $\varphi_i(\Psi(y)) = y_i \Rightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(\Psi(y))\cdot\frac{\partial\Psi_j}{\partial y_k}(y) = \delta_{i,k}$ $\forall y$.

D'où

$$\left.\frac{\partial(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\right|_0 \cdot \left.\frac{\partial(\psi_1,\dots,\psi_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}\right|_0 = \mathrm{Id}.$$

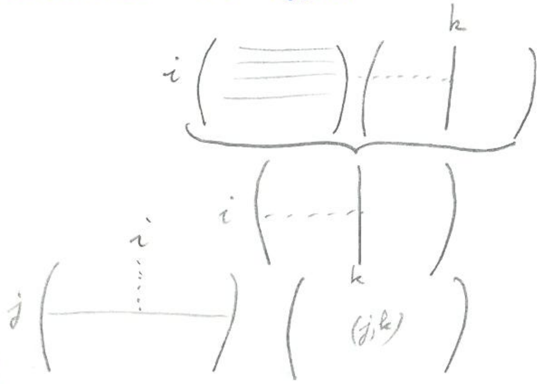
De même

$$\left.\frac{\partial(\psi_1,\dots,\psi_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}\right|_0 \cdot \left.\frac{\partial(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\right|_0 = \mathrm{Id}.$$

Donc $A = \left.\dfrac{\partial(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\right|_0$ est inversible, $A^{-1} = \left.\dfrac{\partial(\psi_1,\dots,\psi_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}\right|_0$.

$$\left(A \cdot \left.\frac{\partial(g_1,\dots,g_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\right|_0 A^{-1}\right)_{j,k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(0) \cdot \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_\ell}(0) \cdot \frac{\partial \psi_\ell}{\partial y_k}(0)\right)$$

On reconnaît là $(*)$.



]

Nous appelons $\dfrac{\partial(g_1,\dots,g_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$ la "matrice jacobienne de D relativement à $x_1,\dots,x_n$", et nous la notons $\dfrac{\partial D}{\partial x}$.

Définition 2.1

(i) Un opérateur différentiel D agissant sur $\mathbb{C}[[x_1,\dots,x_n]]$ est appelé "semi-simple" s'il remplit l'une des conditions équivalentes suivantes :

a) La matrice jacobienne $\dfrac{\partial D}{\partial x}$ est une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

à coefficients constants.

b) $D = \alpha_1 x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n x_n \dfrac{\partial}{\partial x_n}$, avec des constantes complexes convenables $\alpha_1,\dots,\alpha_n$.

[b) ⇒ a) : évident

a) ⇒ b) :

$$\left.\begin{array}{l} i=1,\dots,n : \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}\, \alpha_i \\ g_i(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g_i = \alpha_i x_i$$

]

(ii) Un opérateur $\mathcal{D}$ agissant sur R est appelé un "nilopérateur" si, dans un (et donc dans tout) système de coordonnées $x_1, \dots, x_n$, toutes les valeurs propres de $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x}\big|_0$ sont nulles (cf formule (1)).

Lemme 2.2

Soient $\mathcal{D}$ un nilopérateur agissant sur R, et $\lambda \in \mathbb{C}$.
Si l'équation

$$\mathcal{D} f = \lambda f \qquad (2)$$

admet une solution non triviale $f \in R$, alors $\lambda = 0$.

Preuve

Supposons, sans perte de généralité, que $R = \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$.

i) Nous étudions tout d'abord le cas où tous les coefficients g_i de $\mathcal{D}$ sont linéaires. Dans ce cas particulier, nous démontrons le résultat par récurrence sur le nombre n de variables.

. Si $n = 1$, alors $\mathcal{D} = 0$, d'où $\lambda = 0$.

[$\mathcal{D} = \alpha x \frac{\partial}{\partial x}$

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x} = \alpha = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x}\Big|_0 \quad \text{de v.p. } \alpha \; !$$

$\mathcal{D}$ nilopérateur $\Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \mathcal{D} = 0$

$\exists f \neq 0 \,/\, \lambda f = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ par intégrité de $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$.]

. Supposons que l'assertion soit vraie pour $n = n_0$.
Soit alors $\mathcal{D}$ un opérateur différentiel [à coefficients linéaires] agissant sur $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_{n_0+1}]]$, dont la matrice jacobienne est nilpotente.
[$\Leftrightarrow \mathcal{D}$ nilopérateur].

[Par hyp., les coeff. de D sont linéaires $\Rightarrow \frac{\partial D}{\partial x} = \frac{\partial D}{\partial x}\Big|_0$ est à coeff. dans $\mathbb{C}$]

[K un corps, E un K-e.v. de dim. finie, u un endomorphisme de E.

u est nilpotent $\Leftrightarrow$ 0 est valeur propre de u de multiplicité $n = \dim E$]

Grâce à la formule (1), nous pouvons supposer sans perte de généralité que cette matrice jacobienne est déjà sous forme de Jordan.

[u nilpotent $\Rightarrow$ u trigonalisable sous forme de Jordan.
Formule (1) $\Rightarrow$ quitte à faire un chg^t de coordonnées, on peut supposer que $\frac{\partial D}{\partial x} = \frac{\partial D}{\partial x}\Big|_0$ est déjà sous forme de Jordan.]

Il y a deux possibilités:

a) $\frac{\partial D}{\partial x} = \left(\begin{array}{c|c} A' & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 0 \end{array}\right)$ b) $\frac{\partial D}{\partial x} = \left(\begin{array}{c|c} A' & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 0 \end{array}\right)$

où A' est une matrice $(n_0 \times n_0)$ nilpotente.

[a) si la forme de Jordan est $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{0} \end{pmatrix}$

b) si c'est $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$]

Notons D' l'opérateur différentiel [à coefficients linéaires] agissant sur $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_{n_0}]]$ de matrice jacobienne A'.
Développons la solution f non triviale de l'équation (2) en puissances de x_{n_0+1} :

$$f(x_1, \dots, x_{n_0}, x_{n_0+1}) = \sum_{m=m_0}^{+\infty} f_m(x_1, \dots, x_{n_0})\, x_{n_0+1}^{m} \quad , \; f_{m_0} \neq 0 \qquad (3).$$

dans les deux cas (a) et b)), nous obtenons, à partir de (2) et (3), que :

$$\mathcal{D}' f_{m_0} = \lambda f_{m_0} \quad , \; f_{m_0} \neq 0.$$

[* Cas a)

$$\mathcal{D} = \left(\alpha_1^{(1)} x_1 + \dots + \alpha_{n_0}^{(1)} x_{n_0}\right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \left(\alpha_1^{(n_0)} x_1 + \dots + \alpha_{n_0}^{(n_0)} x_{n_0}\right) \frac{\partial}{\partial x_{n_0}}$$

$$\mathcal{D}' = \left(\alpha_1^{(1)} x_1 + \dots + \alpha_{n_0}^{(1)} x_{n_0}\right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \left(\alpha_1^{(n_0)} x_1 + \dots + \alpha_{n_0}^{(n_0)} x_{n_0}\right) \frac{\partial}{\partial x_{n_0}}$$

$$\mathcal{D} f = \lambda f \Leftrightarrow \mathcal{D}\left(f_{m_0} x_{n_0+1}^{m_0} + f_{m_1} x_{n_0+1}^{m_1} + \dots\right) = \lambda\left(f_{m_0} x_{n_0+1}^{m_0} + f_{m_1} x_{n_0+1}^{m_1} + \dots\right)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D}(f_{m_0}) \cdot x_{n_0+1}^{m_0} + \mathcal{D}(f_{m_1}) \cdot x_{n_0+1}^{m_1} + \dots = \lambda f_{m_0} x_{n_0+1}^{m_0} + \lambda f_{m_1} x_{n_0+1}^{m_1} + \dots$$

On identifie les coeff. de $x_{n_0+1}^{m_0}$,

d'où $\quad \mathcal{D} \cdot f_{m_0} = \lambda f_{m_0}$

ie $\quad \mathcal{D}' \cdot f_{m_0} = \lambda f_{m_0}$.

* Cas b)

$$\mathcal{D} = \left(\alpha_1^{(1)} x_1 + \dots + \alpha_{n_0}^{(1)} x_{n_0}\right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \left(\alpha_1^{(n_0)} x_1 + \dots + \alpha_{n_0}^{(n_0)} x_{n_0} + \alpha_{n_0+1}^{(n_0)} x_{n_0+1}\right) \frac{\partial}{\partial x_{n_0}}$$

$$\mathcal{D}' = \left(\alpha_1^{(1)} x_1 + \dots + \alpha_{n_0}^{(1)} x_{n_0}\right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \left(\alpha_1^{(n_0)} x_1 + \dots + \alpha_{n_0}^{(n_0)} x_{n_0}\right) \frac{\partial}{\partial x_{n_0}}$$

Avec alors, on peut écrire $\mathcal{D} = \mathcal{D}' + \alpha_{n_0+1}^{(n_0)} x_{n_0+1} \frac{\partial}{\partial x_{n_0}}$

($\mathcal{D}$ opère sur $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_{n_0+1}]]$, et $\mathcal{D}'$ sur $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_{n_0}]]$).

Alors

$$\mathcal{D} f = \lambda f \Leftrightarrow \mathcal{D}' f + \alpha_{n_0+1}^{(n_0)} x_{n_0+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n_0}} = \lambda f$$

$$\Leftrightarrow \left(\mathcal{D}' f_{m_0}\right) \cdot x_{n_0+1}^{m_0} + \left(\mathcal{D}' f_{m_1}\right) x_{n_0+1}^{m_1} + \dots$$

$$+ \alpha_{n_0+1}^{(n_0)} \frac{\partial f_{m_0}}{\partial x_{n_0}} x_{n_0+1}^{m_0+1} + \alpha_{n_0+1}^{(n_0)} \frac{\partial f_{m_1}}{\partial x_{n_0}} x_{n_0+1}^{m_1+1} + \dots$$

$$= \lambda f_{m_0} x_{n_0+1}^{m_0} + \lambda f_{m_1} x_{n_0+1}^{m_1} + \dots$$

Après identification des coeff. de $x_{n_0+1}^{m_0}$, il vient :

$$D' f_{m_0} = \lambda f_{m_0} .$$]

Alors, par hypothèse de récurrence, il vient : $\lambda = 0$.

ii) Revenons maintenant au cas général : donnons-nous un rilopérateur D.

D peut être décomposé en la somme d'un D_1 et d'un D_2, où les coefficients de D_1 sont linéaires, et ceux de D_2 d'ordre ≥ 2.

On a donc :

$$\begin{cases} D = D_1 + D_2 \\ \dfrac{\partial D_1}{\partial x} = \dfrac{\partial D}{\partial x}\Big|_0 \\ \dfrac{\partial D_2}{\partial x}\Big|_0 = 0 . \end{cases}$$

Développons la solution non triviale de (2), f, en série, dont les termes sont des polynômes homogènes :

$$f = \sum_{m=m_0}^{+\infty} f_m ,$$

où f_m est un polynôme homogène de degré m, et $f_{m_0} \neq 0$.

L'équation (2) est alors équivalente à :

$$D_1 f_{m_0} = \lambda f_{m_0} \quad \text{et} \quad D_2 f_{m_0} + D \sum_{m > m_0} f_m = \lambda \sum_{m > m_0} f_m .$$

[$Df = \lambda f \Leftrightarrow \sum_{m \geq m_0} \underbrace{D_1 \cdot f_m}_{\substack{\text{poly. homo.} \\ \text{de } d^\circ m}} + \sum_{m \geq m_0} \underbrace{D_2 f_m}_{\substack{\text{poly. homo.} \\ \text{de } d^\circ \geq m+1}} = \lambda \sum_{m \geq m_0} f_m .$

Après identification des termes de m̂ d°, il vient :

* en $d^\circ m_0$

$$D_1 f_{m_0} = \lambda f_{m_0}$$

* en $d^\circ > m_0$

$$D_2 f_{m_0} + D \sum_{m > m_0} f_m = \lambda \sum_{m > m_0} f_m$$]

On déduit de (i) que $\alpha = 0$.

[D_1 est un nilopérateur à coeff. linéaires].

$\square$

<u>Remarque</u>

Le lemme prouve que toutes les valeurs propres d'un nilopérateur défini sur $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ sont nulles.

On montre facilement, d'après ce lemme, que pour tout nilopérateur à coeff. holomorphes, toute fonction propre non triviale dans $\mathcal{M}(x_1, \ldots, x_n)$, le corps des germes de fonctions méromorphes, correspond à la valeur propre 0.

Si l'on voulait examiner la situation analogue pour l'anneau $\mathcal{E}(x_1, \ldots, x_n)$ des germes de fonctions C^∞, l'analogue du lemme ne serait plus vrai.

cf l'exemple suivant :

$$f(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{1 + \alpha x_1 x_2}{x_2^{\,2}}\right) \in \mathcal{E}(x_1, x_2)$$

est une solution pour $D = -x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_1}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ quelconque

$$\left[\ \frac{\partial D}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ \right]$$

$\square$

Dans la fin de ce paragraphe, nous étudions les opérateurs semi-simples.

<u>Lemme 2-3</u>

Soit $D = \alpha_1 x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n x_n \dfrac{\partial}{\partial x_n}$ un opérateur différentiel semi-simple.

(i) $f \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ est F.Q.H. de type $(\alpha_0 ; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ <u>ssi</u> f est une fonction propre de D pour la valeur propre α_0.

(ii) $\alpha \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de D <u>ssi</u> $\exists\, m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$, tels que $\lambda = \alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n$.

L'ensemble des valeurs propres de D est dénombrable.

(iii) Toute fonction $f \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ peut être développée de manière unique sous la forme suivante :

$$f = \sum_{\lambda} f_\lambda ,$$

où λ parcourt l'ensemble des valeurs propres de $\mathcal{D}$, et f_λ est une fonction propre pour la valeur propre λ.

Preuve

[Sens $\Rightarrow$ de (i)]

Soit f F.Q.H. de type $(\alpha_0; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

D'après la définition de l'homogénéité faible (déf. 1.1.(ii)), on peut développer f de la manière suivante :

$$f = \sum_{\alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_n m_n = \alpha_0} a_{m_1, \dots, m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} .$$

D'autre part, pour tout monôme $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, on a :

$$\left(\alpha_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} = (\alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_n m_n) x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}.$$

Il s'ensuit que :

$$\mathcal{D} f = \alpha_0 f .$$

[(iii)]

Soit maintenant $f \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ quelconque

Développons f en série entière :

$$f = \sum_{m_1, \dots, m_n} a_{m_1, \dots, m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} .$$

Mais il est clair que l'on peut encore écrire f sous la forme suivante :

$$f = \sum_{\lambda} \sum_{\alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_n m_n = \lambda} a_{m_1, \dots, m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} .$$

Il résulte de la première partie de cette preuve que

$$\sum_{\alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_n m_n = \lambda} a_{m_1, \dots, m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$$

est une fonction propre de $\mathcal{D}$ pour la valeur propre λ.

Nous avons donc développé f en une série infinie de fonctions propres de $\mathcal{D}$.

L'unicité de cette série se déduit de l'unicité du développement en série entière.

[Sens $\Leftarrow$ de (i)]

Soit maintenant f une solution de l'équation $Df = \alpha_0 f$.
Comme nous venons de le voir, on peut développer f en une série infinie de fonctions propres:

$$f = \sum_\alpha f_\alpha .$$

On a :

$$D \sum_\alpha f_\alpha = \alpha_0 \sum_{\alpha \in \mathbb{C}} f_\alpha \quad , \ \underline{\text{ie}} \ \sum_\alpha (\alpha - \alpha_0) f_\alpha = 0$$

[Par unicité de la décomposition,] si $\alpha \neq \alpha_0$, $f_\alpha = 0$,
d'où

$$f = f_{\alpha_0} \quad [\text{est F.Q.H. de type } (\alpha_0 ; \alpha_1, \dots, \alpha_n)].$$

[(ii)

α v.p. de $D \iff \exists f \,/\, Df = \alpha f$

$\overset{\text{par (i)}}{\iff} \exists f$ F.Q.H. de type $(\alpha ; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$\iff \exists f$ comb. lin. de monômes $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$

tq $\alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_n m_n = \alpha$]

$\square$

<u>Lemme 2.4</u>

Soit D un opérateur différentiel à coefficients linéaires, dont la matrice jacobienne est une matrice de Jordan :

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} \alpha_1 & & 0 \\ 1 & \alpha_2 & \\ 0 & \ddots & \ddots \\ & 1 & \alpha_{\ell_1} \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} \alpha_{n-\ell_k+1} & & \\ 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots \\ & & 1 \ \alpha_n \end{matrix} \end{array} \right) \begin{array}{c} \updownarrow \ell_1 \\ \\ \vdots \\ \\ \updownarrow \ell_k \end{array} \qquad (1)$$

avec $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{\ell_2}$

$\alpha_{\ell_1+2} = \cdots = \alpha_{\ell_1+\ell_2}$ (2)

$\alpha_{n-\ell_k+1} = \cdots = \alpha_n$

et $\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_k = n$.

Soit $f \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ une fonction F.Q.H. de type $(d; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, et α une constante de $\mathbb{C}$ telle que $\alpha \neq d$.

Alors il existe une unique fonction $h \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ telle que l'on ait :

(i) h est F.Q.H. de type $(d; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

(ii) $Dh - \alpha h + f = 0$.

Si f est homogène de degré m, alors h est aussi homogène de degré m.

Preuve

Il suffit d'étudier le cas homogène.

[En effet, si l'on a résolu le cas homogène :

soit f F.Q.H. de type $(d; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$,

$$f = \sum_{\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n = d} \underbrace{a_{m_1, \ldots, m_n} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}}_{\substack{\shortparallel \\ f_{m_1,\ldots,m_n} \text{ homogène de degré } m_1 + \cdots + m_n}}$$

Par hypothèse,

$\forall (m_1, \ldots, m_n) \,/\, \alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n = d$, $\exists!\, h_{m_1, \ldots, m_n}$ homogène de degré $m_1 + \cdots + m_n$, F.Q.H. de type $(d; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, telle que

$$D h_{m_1, \ldots, m_n} - \alpha h_{m_1, \ldots, m_n} + f_{m_1, \ldots, m_n} = 0.$$

Après sommation, il vient :

$$D \sum_{\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n = d} h_{m_1, \ldots, m_n} - \alpha \sum_{\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n = d} h_{m_1, \ldots, m_n} + f = 0$$

Il suffit de poser $h := \sum_{\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n = d} h_{m_1, \ldots, m_n}$.

Unicité : ?

]

Nous décomposons D de la manière suivante :

$$D_S = \alpha_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

$$D_N = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + x_{l_1-1} \frac{\partial}{\partial x_{l_1}} + x_{l_1+1} \frac{\partial}{\partial x_{l_1+2}} + \cdots + x_{n-1} \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Alors

$$D = D_S + D_N \,, \quad \text{et} \quad D_S D_N = D_N D_S .$$

(La seconde formule découle des conditions (2) ci-dessus).

[Montrons la seconde formule par récurrence sur n :

* si $n = 1$

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \alpha$$

$$D = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} = D_S \quad \text{et} \quad D_N = 0 \quad , \text{donc } D_S \text{ et } D_N \text{ commutent!}$$

* si c'est vrai pour n, montrons que c'est vrai pour $n+1$

Deux cas se présentent :

a)

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} \alpha_1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \alpha_{l_1} \end{matrix} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} \alpha_{n-l_k+1} & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \alpha_n \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \alpha_{n+1} \end{array}\right) \begin{array}{l} \updownarrow l_1 \\ \vdots \\ \updownarrow l_k \\ \updownarrow l_{k+1} = 1 \end{array}$$

b)

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} \alpha_1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \alpha_{l_1} \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} \alpha_{n-l_k+1} & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ 0 & 1 & \alpha_n & \\ & & 1 & \alpha_{n+1} \end{matrix} \end{array}\right) \begin{array}{l} \updownarrow l_1 \\ \vdots \\ \updownarrow l_k \end{array} \quad \text{avec } \alpha_n = \alpha_{n+1}$$

a) $$D = \underbrace{\underbrace{\alpha_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}}_{\tilde{D}_S} + \alpha_{n+1} x_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}}_{D_S}$$

$$+ \underbrace{x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + x_{\ell_1 - 1} \frac{\partial}{\partial x_{\ell_1}} + x_{\ell_1+1} \frac{\partial}{\partial x_{\ell_1+2}} + \cdots + x_{n-1} \frac{\partial}{\partial x_n}}_{\tilde{D}_N = D_N}$$

$$D_S \cdot D_N = \left(\tilde{D}_S + \alpha_{n+1} x_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \right) \tilde{D}_N = \underset{\text{par hyp de réc}}{\tilde{D}_N \tilde{D}_S} + \tilde{D}_N \alpha_{n+1} x_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$$

car $\nexists$ de x_{n+1} ou $\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$ dans $\tilde{D}_N$

$$= D_N D_S$$

b) $$D = \underbrace{\underbrace{\alpha_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}}_{\tilde{D}_S} + \alpha_{n+1} x_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}}_{D_S}$$

$$+ \underbrace{\underbrace{x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + x_{\ell_1 - 1} \frac{\partial}{\partial x_{\ell_1}} + x_{\ell_1+1} \frac{\partial}{\partial x_{\ell_1+2}} + \cdots + x_{n-1} \frac{\partial}{\partial x_n}}_{\tilde{D}_N} + x_n \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}}_{D_N}$$

$$D_S D_N = \left(\tilde{D}_S + \alpha_{n+1} x_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \right) \left(\tilde{D}_N + x_n \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \right)$$

$$= \underset{\text{par hyp de réc}}{\tilde{D}_N \tilde{D}_S} + \underset{\text{car } \nexists \text{ de } x_{n+1},\, \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \text{ dans } \tilde{D}_N}{\tilde{D}_N \alpha_{n+1} x_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}} + x_n \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \left(\alpha_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1} \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + \alpha_n \left(x_n \frac{\partial}{\partial x_n} + 1 \right) \right)$$

$$+ \alpha_{n+1} x_n \left(\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} x_{n+1} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$$

$$= \tilde{D}_N \tilde{D}_S + x_n \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} D_S + \cancel{\alpha_n x_n \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}} - \cancel{\underset{\underset{\alpha_n}{\shortparallel}}{\alpha_{n+1}} x_n \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}}$$

$$= D_N D_S$$

□

Soit $W_{m,\lambda}$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré m, qui sont F.Q.H. de type $(\lambda; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Pour $P \in W_{m,\lambda}$, on a :

$$\mathcal{D}_S P = \lambda P$$

$$\text{et } \mathcal{D}_N P \in W_{m,\lambda}.$$

(La deuxième relation découle de :

$$\mathcal{D}_S (\mathcal{D}_N P) = \mathcal{D}_N \mathcal{D}_S P = \lambda \mathcal{D}_N P$$

$\Rightarrow \mathcal{D}_N P$ est F.Q.H. de type $(\lambda; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ [cf lemme 2-3(i)])

Montrons que $\mathcal{D} - \alpha I_{W_{m,\lambda}}$ est un automorphisme linéaire de $W_{m,\lambda}$ (où $I_{W_{m,\lambda}}$ désigne l'identité de $W_{m,\lambda}$) :

$$\mathcal{D} - \alpha I_{W_{m,\lambda}} = (\mathcal{D}_S + \mathcal{D}_N) - \alpha I_{W_{m,\lambda}} = (\lambda - \alpha) I_{W_{m,\lambda}} + \mathcal{D}_N,$$

où $\lambda - \alpha$ est non nul par hypothèse,

et $\mathcal{D}_N$ est un opérateur nilpotent d'après le lemme 2-2.

[$\mathcal{D}_N$ est bien un nilopérateur $\Rightarrow$ le lemme 2-2 s'applique].

Il est alors clair que pour tout $f \in W_{m,\lambda}$, il existe un unique $h \in W_{m,\lambda}$ tel que $\mathcal{D}h - \alpha h + f = 0$.

$\square$

<u>Corollaire 2-5</u>

Sous les hypothèses du lemme 2-4, on a :
pour toute série entière $f \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$, et toute constante $\alpha \in \mathbb{C}$, il existe une fonction $h \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$, telle que $\mathcal{D}h - \alpha h + f$ est F.Q.H. de type $(\alpha; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
Si f est homogène de degré m, on peut choisir h homogène de degré m aussi.

<u>Preuve</u>

Il suffit de développer f selon le lemme 2-3 (iii), et d'utiliser le lemme 2-4.

[$f = \sum_{\lambda} \underbrace{f_{\lambda}}$ F.Q.H. de type $(\lambda; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

$\forall \lambda \neq \alpha, \quad \exists h_{\lambda} \ / \ D h_{\lambda} - \alpha h_{\lambda} + f_{\lambda} = 0.$

D'où

$$D \sum_{\lambda \neq \alpha} h_{\lambda} - \alpha \sum_{\lambda \neq \alpha} h_{\lambda} + \sum_{\lambda \neq \alpha} f_{\lambda} = 0$$

et $$D \sum_{\lambda \neq \alpha} h_{\lambda} - \alpha \sum_{\lambda \neq \alpha} h_{\lambda} + f = f_{\alpha}$$]

$\square$

---

§3 Forme normale d'opérateurs différentiels linéaires d'ordre 1

Dans ce paragraphe, nous donnons la forme normale d'opérateurs différentiels (au sens du §2) quelconques, sur un anneau local R isomorphe à $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ (Prop. 3.1), et nous montrons que leurs fonctions propres doivent être F.Q.H. (Prop 3.2).

<u>Proposition 3.1</u>

Soit D un opérateur différentiel quelconque sur R.
Alors, dans un système de coordonnées convenable, D possède la forme normale suivante :

on peut développer D en la somme de deux opérateurs D_S et D_N qui commutent entre eux, où D_S est un opérateur semi-simple (relativement à ce système de coordonnées), et D_N un nilopérateur.

On doit donc avoir pour D_S et D_N :

(i) $D = D_S + D_N$

(ii) $D_S D_N = D_N D_S$.

<u>Preuve</u>

Introduisons de nouvelles notations, pour présenter clairement le calcul.
Soient f un élément de R,
$m \in \mathfrak{M}$,
et $x = (x_1, \dots, x_n)$ un système de coordonnées de R.

Nous notons $\{f\}_{m,x}$ la partie homogène de degré m en x de f.

Naturellement, $\quad f = \sum_{m=0}^{\infty} \{f\}_{m,x}$.

Choisissons un système de coordonnées $x=(x_1,\dots,x_n)$ de $\mathbb{R}$, tel que la matrice jacobienne $\frac{\partial D}{\partial x}\Big|_0$ soit sous forme de Jordan :

$$\frac{\partial D}{\partial x}\Big|_0 = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}\alpha_1 & & 0\\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \alpha_{l_1}\end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix}\alpha_{n-l_k+1} & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \alpha_n\end{matrix}\end{array}\right) \begin{array}{l} \updownarrow l_1 \\ \vdots \\ \updownarrow l_k\end{array} \qquad (1)$$

avec

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{l_1},$$
$$\alpha_{l_1+1} = \dots = \alpha_{l_1+l_2},$$
$$\alpha_{n-l_k+1} = \dots = \alpha_n,$$
$$l_1 + \dots + l_k = n.$$

a) Maintenant construisons, de manière récursive tout d'abord, une suite infinie de systèmes de coordonnées $x^{(m)}=(x_1^{(m)},\dots,x_n^{(m)})$, $m \in \mathbb{N}^*$, devant remplir les conditions suivantes :

(i) $x_i^{(m)} = x_i^{(m-1)} + h_i^{(m)}$, $i = 1,\dots,n$, où $h_i^{(m)}$ est un polynôme en $x^{(m-1)}$ homogène de degré m.

(ii) si D est de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} g_i^{(m)}(x^{(m)}) \frac{\partial}{\partial x_i^{(m)}}$$

dans le système de coordonnées $x^{(m)}=(x_1^{(m)},\dots,x_n^{(m)})$, alors, pour $m' \le m$, $\{g_i^{(m)}\}_{m',x^{(m)}}$ doit être F.Q.H. de type $(\alpha_i;\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ relativement à $x^{(m)}$.

• Dans le cas $m = 1$, posons $x_i^{(1)} = x_i$, $i = 1, \dots, n$.
Alors (i) est triviale, et (ii) est remplie aussi, car on a :

$$\left\{g_i^{(1)}(x^{(1)})\right\}_{1, x^{(1)}} = \begin{cases} \alpha_i\ x_i^{(1)} & \text{si } i = 1, \ell_1+1, \ell_1+\ell_2+1, \dots, n-\ell_k+1 , \\ \alpha_i\ x_i^{(1)} + x_{i-1}^{(1)} & \text{sinon} \end{cases}$$

et x_{i-1}, avec $i \neq 1, \ell_1+1, \dots, n-\ell_k+1$, est F.Q.H. de type $(\alpha_{i-1}; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (cf (1)).

• Dans le cas général, notons $\mathcal{D}_1^{(m)}$ la partie linéaire de
$\sum_{i=1}^{n} g_i^{(m)} \frac{\partial}{\partial x_i^{(m)}}$.
Alors la matrice constante $\frac{\partial \mathcal{D}_1^{(m)}}{\partial x^{(m)}}$ coïncide avec $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x}\Big|_0$.
Supposons maintenant que, pour $m = 1, 2, \dots, m_0$, $x^{(m)}$ a déjà été construit.
Si $x_i^{(m_0+1)} = x_i^{(m_0)} + h_i$, $i = 1, \dots, n$, (2)
où h_i est un polynôme homogène de degré m_0+1 par rapport à $x^{(m_0)}$, encore à déterminer, on a :

$$g_i^{(m_0+1)}(x^{(m_0+1)}) = \mathcal{D}\ x_i^{(m_0+1)} = g_i^{(m_0)}(x^{(m_0)}) + \mathcal{D}\ h_i \quad (3).$$

[Par changement de système de coordonnées :

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{n} g_i^{(m_0)}(x^{(m_0)}) \frac{\partial}{\partial x_i^{(m_0)}}\right) = \sum_{i,j} g_j^{(m_0)}\left(\psi(x^{(m_0+1)})\right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j^{(m_0)}}\left(\psi(x^{(m_0+1)})\right) \frac{\partial}{\partial x_i^{(m_0+1)}}.$$

Donc

$$g_i^{(m_0+1)}(x^{(m_0+1)}) = \sum_{j=1}^{n} g_j^{(m_0)}\left(\psi(x^{(m_0+1)})\right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j^{(m_0)}} \left(\psi(x^{(m_0+1)})\right)$$

avec $\begin{cases} x^{(m_0+1)} = \varphi(x^{(m_0)}) \\ x^{(m_0)} = \psi(x^{(m_0+1)}) \end{cases}$ où $\varphi_i(x^{(m_0)}) = x_i^{(m_0)} + h_i^{(m_0+1)}(x^{(m_0)})$

D'où

$$g_i^{(m_0+2)}\left(x^{(m_0+2)}\right) = g_i^{(m_0)}\left(\varphi\left(x^{(m_0+1)}\right)\right)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} g_j^{(m_0)}\left(\varphi\left(x^{(m_0+1)}\right)\right) \frac{\partial h_i^{(m_0+1)}}{\partial x_j^{(m_0)}}\left(\varphi\left(x^{(m_0+1)}\right)\right)$$

où l'on reconnaît :

$$g_i^{(m_0)}\left(x^{(m_0)}\right) + D.\, h_i^{(m_0+1)} .$$

]

Pour $i = 1, l_1+2, \dots, n-l_k+2$, on a alors:

$$g_i^{(m_0)}\left(x^{(m_0)}\right) + D\, h_i = \alpha_i\, x_i^{(m_0+2)} + \sum_{m=2}^{m_0} \left\{ g_i^{(m_0)}\left(x^{(m_0)}\right)\right\}_{m,\, x^{(m_0)}}$$

$$+ \Psi_i\left(x^{(m_0)}\right)$$

$$+ \text{termes de degré} \geq m_0+2 \text{ en } x^{(m_0)} ,$$

où

$$\Psi_i\left(x^{(m_0)}\right) = D_1^{(m_0)} h_i - \alpha_i h_i + \left\{ g_i^{(m_0)}\left(x^{(m_0)}\right)\right\}_{m_0+1,\, x^{(m_0)}} .$$

$$\Big[\; g_i^{(m_0)}\left(x^{(m_0)}\right) + D h_i = \left\{ g_i^{(m_0)}\left(x^{(m_0)}\right)\right\}_{1,\, x^{(m_0)}} + \sum_{m=2}^{m_0} \left\{ g_i^{(m_0)}\left(x^{(m_0)}\right)\right\}_{m,\, x^{(m_0)}}$$

$$+ \left[\left\{ g_i^{(m_0)}\left(x^{(m_0)}\right)\right\}_{m_0+1,\, x^{(m_0)}} + D_1^{(m_0)} h_i\right]$$

$$+ \text{termes de } d^\circ \geq m_0+2 \text{ en } x^{(m_0)} .$$

A voir : $\left\{ g_i^{(m_0)}\left(x^{(m_0)}\right)\right\}_{1,\, x^{(m_0)}} = \alpha_i\, x_i^{(m_0)}$.

Montrons que : $\forall m$, $\left.\dfrac{\partial D}{\partial x^{(m)}}\right|_0 = \left.\dfrac{\partial D}{\partial x}\right|_0$.

Il suffit de vérifier que $\left.\dfrac{\partial D}{\partial x^{(m+1)}}\right|_0 = \left.\dfrac{\partial D}{\partial x^{(m)}}\right|_0 \quad \forall m.$

$$\left.\frac{\partial D}{\partial x^{(m+1)}}\right|_0 = A_{(m+1)} \left.\frac{\partial D}{\partial x^{(m)}}\right|_0 A_{(m+1)}^{-1}$$

$$\text{où} \quad A_{(m+1)} = \left.\frac{\partial\left(x_1^{(m+1)}, \dots, x_n^{(m+1)}\right)}{\partial\left(x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}\right)}\right|_0 .$$

$$\text{Or} \quad x_i^{(m+1)} = x_i^{(m)} + \underbrace{h_i^{(m+1)}}_{\text{polynôme homogène de degré } \underbrace{m+1}_{\geq 2} \text{ en } x^{(m)}}$$

$$\text{d'où} \quad \left.\frac{\partial x_i^{(m+1)}}{\partial x_j^{(m)}}\right|_0 = \delta_{ij}$$

$$\text{et} \quad A_{(m+1)} = \mathrm{Id}$$

CQFD

]

Pour $i \neq 1, l_1+1, \dots, n-l_k+1$, on a par contre

$$g_i^{(m_0)}(x^{(m_0)}) + D h_i = \alpha_i x_i^{(m_0+1)} + x_{i-1}^{(m_0+1)} + \sum_{m=2}^{m_0} \left\{g_i^{(m_0)}(x^{(m_0)})\right\}_{m, x^{(m_0)}}$$

$$+ \varphi_i(x^{(m_0)}) + \text{termes de degré} \geq m_0+2 \text{ en } x^{(m_0)},$$

$$\text{où} \quad \varphi_i(x^{(m_0)}) = D_1^{(m_0)} h_i - \alpha_i h_i + \left\{g_i^{(m_0)}(x^{(m_0)})\right\}_{m_0+1, x^{(m_0)}} - h_{i-1} .$$

[On montre comme dans le cas précédent que :

$$\left\{g_i^{(m_0)}(x^{(m_0)})\right\}_{1, x^{(m_0)}} = \alpha_i x_i^{(m_0)} + x_{i-1}^{(m_0)}$$

]

D'après le corollaire 2-5 [appliqué à $D := D_1^{(m_0)}$, $\alpha := \alpha_i$], on peut choisir les h_i dans (2) de manière récursive, de telle sorte que, pour $i = 1, \dots, n$, $\varphi_i(x^{(m_0)})$ soit F.Q.H. de type $(\alpha_i ; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ relativement à $x^{(m_0)}$.

Alors pour $2 \leq m \leq m_0+1$, $\left\{g_i^{(m_0+1)}\right\}_{m, x^{(m_0)}}$ est F.Q.H. de type $(\alpha_i ; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ relativement à $x^{(m_0)}$.

[Pour $2 \leq m \leq m_0$, c'est établi par hypothèse de récurrence.]

Mais puisque les h_i sont homogènes en $x^{(m_0)}$ de degré m_0+1,

? pour $m = 2, \ldots, m_0+1$ (et naturellement aussi pour $m=1$),

$\left\{ g_i^{(m_0+1)}(x^{(m_0+1)}) \right\}_{m,\, x^{(m_0+1)}}$ est aussi F.Q.H. de type $(\alpha_i ; d_1, \ldots, d_n)$.

[Pour $m=1$, c'est clair dans le 1er cas, et c'est vrai dans le 2e cas aussi car $\alpha_{i-1} = \alpha_i$.]

b) Dans a), nous avons construit une suite infinie de systèmes de coordonnées : $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots$.

Il résulte de (i) (dans la partie a) de la preuve) que :

$$\left\{ x_i^{(N)} \right\}_{m,x} = \left\{ x_i^{(m)} \right\}_{m,x} \quad \text{pour } N \geq m \text{ et } i = 1, \ldots, n,$$

[Par récurrence sur N (m fixe) :

. vrai pour $N = m$ (!)

. si c'est vrai pour N,

$$x_i^{(N+1)} = x_i^{(N)} + \underbrace{h_i^{(N+1)}}_{\text{homogène de } d^\circ = N+1 \text{ en } x^{(N)}}$$

$$\left\{ x_i^{(N+1)} \right\}_{m,x} = \left\{ x_i^{(N)} \right\}_{m,x} + \left\{ h_i^{(N+1)} \right\}_{m,x}$$

$$= \underbrace{\left\{ x_i^{(m)} \right\}_{m,x}}_{\text{par hyp. de réc}} + \underbrace{0}_{\text{car le degré de } h_i^{(N+1)} \text{ est } > m}$$

car le degré de $h_i^{(N+1)}$ est $> m$, donc il ne peut avoir de partie homogène de degré m en aucune variable.
]

C'est pourquoi la suite $(x_i^{(m)})_{m=1,2,3,\ldots}$ converge dans la topologie adique de R.

[$\forall \ell, \exists k_0 = \ell - 1 \,/\, \forall k' \geq k \geq k_0,\ x_i^{(k')} - x_i^{(k)} \in \mathfrak{M}^\ell$.
C'est dire que $(x_i^{(k)})_k$ est une suite de Cauchy pour la topologie $\mathfrak{M}$-adique de R.
$\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ est complet pour cette topologie ; c'est donc une suite convergente.]

Notons y_i la limite. On a alors :

$$\{y_i - x_i^{(N)}\}_{m,x} = 0 \quad \text{pour } N \geq m. \qquad (4)$$

[$\{x_i^{(\ell)}\}_{m,x} = \{x_i^{(N)}\}_{m,x}$ pour $\ell, N \geq m$,

i.e. $\{x_i^{(\ell)} - x_i^{(N)}\}_{m,x} = 0$ pour $\ell, N \geq m$.

Faisons tendre ℓ vers l'∞ :

$$\{y_i - x_i^{(N)}\}_{m,x} = 0 \quad \text{pour } N \geq m. \quad]$$

$y = (y_1, \dots, y_n)$ est le nouveau système de coordonnées cherché : en raison de (4), il est clair que $\left.\dfrac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right|_{x=0}$ est la matrice identité.

$$\left[\ \left.\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right|_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \left.\frac{\partial \{y_i\}_{m,x}}{\partial x_j}\right|_0 = \left.\frac{\partial \{y_i\}_{1,x}}{\partial x_j}\right|_0 = \left.\frac{\partial \{x_i^{(1)}\}_{1,x}}{\partial x_j}\right|_0 \text{ d'après (4),}\right.$$

$$\left. = \left.\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right|_0 = \delta_{ij} \quad \right]$$

Si D est de la forme

$$D = \sum_{i=1}^{n} g_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

dans le système de coordonnées y, il résulte de (3) et (4) que :

? $$\{g_i(y) - g_i^{(N)}(y)\}_{m,y} = 0 \quad \text{pour } N \geq m.$$

Il s'ensuit que $g_i(y)$ est F.Q.H. de type $(\alpha_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

[$\forall N \quad \{g_i^{(N)}(x^{(N)})\}_{m, x^{(N)}}$ est F.Q.H. de type $(\alpha_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ pour $m \leq N$

? $\Rightarrow \forall N \quad \{g_i^{(N)}(y)\}_{m, y}$ est F.Q.H. de type $(\alpha_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ pour $m \leq N$.]

Posons
$$D_S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \qquad D_N = \sum_{i=1}^{n} (g_i(y) - \alpha_i y_i) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Il est clair que D_S est un opérateur semi-simple, D_N un nilopérateur, et que l'on a bien l'égalité $D = D_S + D_N$.

[D_N est un nilopérateur :

$$\left.\frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}\right|_0 = A \left.\frac{\partial(g_1^{(1)}, \dots, g_n^{(1)})}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right|_0 A^{-1},$$

$$\text{où } A = \left.\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right|_0.$$

Or $\{y_i - x_i^{(N)}\}_{m,x} = 0$ pour $N \geq m$.

Donc $\{y_i - x_i\}_{1,x} = 0$, d'où $y_i(x) - x_i \in \mathcal{M}^2_{(x)}$.
("chgt de coord. tangent à l'identité")

En conséquence $A = \mathrm{Id}$, et :

$$\left.\frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}\right|_0 = \left.\frac{\partial(g_1^{(1)}, \dots, g_n^{(1)})}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right|_0 = \left.\frac{\partial D}{\partial x}\right|_0$$

la matrice de Jordan (1), verso de la feuille 15.

D'où

$$\left.\frac{\partial(g_1 - \alpha_1 y_1, \dots, g_n - \alpha_n y_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}\right|_0 = \left.\frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}\right|_0 - \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix}$$

matrice nilpotente.

$\square$]

On a

$$D_S D_N - D_N D_S = \sum_{i=1}^{n} \left(D_S(g_i - \alpha_i y_i) - \alpha_i (g_i - \alpha_i y_i) \right) \frac{\partial}{\partial y_i} .$$

[$$D_N D_S = \left(\sum_{i=1}^{n} (g_i(y) - \alpha_i y_i) \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (g_i(y) - \alpha_i y_i) \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} + \alpha_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (g_i(y) - \alpha_i y_i) \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \frac{\partial}{\partial y_j} + \alpha_i \right) \frac{\partial}{\partial y_i} .$$

$$D_S D_N = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \left[\sum_{i=1}^{n} \left(g_i(y) \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y) - \alpha_i y_i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_i} - \alpha_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \left[\sum_{i=1}^{n} \left[(g_i(y) - \alpha_i y_i) \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y) \right] \frac{\partial}{\partial y_i} - \alpha_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (g_i(y) - \alpha_i y_i) \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \alpha_j \frac{\partial}{\partial y_j}$$

$$D_S D_N - D_N D_S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \alpha_j \frac{\partial}{\partial y_j}$$

$$- \sum_{i=1}^{n} (g_i(y) - \alpha_i y_i) \alpha_i \frac{\partial}{\partial y_i} .$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y) - \alpha_i y_i \alpha_i - \alpha_i (g_i(y) - \alpha_i y_i) \right] \frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \cdot (g_i(y) - \alpha_i y_i) - \alpha_i (g_i(y) - \alpha_i y_i) \right] \frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[D_S (g_i(y) - \alpha_i y_i) - \alpha_i (g_i(y) - \alpha_i y_i) \right] \frac{\partial}{\partial y_i} .$$]

Mais puisque $g_i - \alpha_i y_i$ est F.Q.H. de type $(\alpha_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ relativement à y,

$$D_S (g_i(y) - \alpha_i y_i) = \alpha_i (g_i(y) - \alpha_i y_i) .$$

D'où

$$\mathcal{D}_S \mathcal{D}_N - \mathcal{D}_N \mathcal{D}_S = 0$$

$\square$

Proposition 3.2

Soit $\mathcal{D}$ un opérateur différentiel sur $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$, qui possède la forme normale $\mathcal{D} = \mathcal{D}_S + \mathcal{D}_N$ précisée dans la proposition 3.1.
Pour $f \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, les énoncés suivants sont équivalents :

(i) $\mathcal{D} f = \lambda f$,

(ii) $\mathcal{D}_S f = \lambda f$,
$\mathcal{D}_N f = 0$.

Preuve

- (ii) $\Rightarrow$ (i) : trivial
- (i) $\Rightarrow$ (ii) : développons la solution de (i) en fonctions propres de $\mathcal{D}_S$ (cf lemme 2.3 (iii)) : $f = \sum_\mu f_\mu$.

Alors on a :

$$0 = \sum_\mu (\mathcal{D} f_\mu - \lambda f_\mu) = \sum_\mu [(\mu - \lambda) f_\mu + \mathcal{D}_N f_\mu].$$

Puisque $\mathcal{D}_S$ et $\mathcal{D}_N$ commutent entre eux, $\mathcal{D}_N f_\mu$ (et donc $(\mu-\lambda) f_\mu + \mathcal{D}_N f_\mu$ aussi) est donc une fonction propre de $\mathcal{D}_S$ pour la valeur propre μ.

$[\mathcal{D}_S (\mathcal{D}_N f_\mu) = \mathcal{D}_N (\mathcal{D}_S f_\mu) = \mu (\mathcal{D}_N f_\mu)]$.

Par l'unicité du développement en fonctions propres, il vient :

$$(\mu - \lambda) f_\mu + \mathcal{D}_N f_\mu = 0 \qquad \forall \mu \qquad (*)$$

D'après le lemme 2.2, on a :

$$\lambda - \mu = 0 \quad \text{ou} \quad f_\mu = 0.$$

Donc
$$f = f_\lambda .$$
[ie f est fonction propre de D_s pour la v.p. λ -

donc $D_s f = \lambda f$.

Et d'après (*) : pour $\mu = \lambda$: $D_N f = 0$]

$\square$

Corollaire 3.3

Soit $f \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ une solution de l'équation différentielle
$$g_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + g_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \lambda f ,$$
avec $g_i \in \mathcal{M} \subset \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$, $i = 1, \dots, n$,
$\lambda \in \mathbb{C}$.
Alors il existe un changement de coordonnées φ tel que $f \circ \varphi$ soit une série F.Q.H. de type $(\lambda; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les valeurs propres de $\left.\frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right|_{x=0}$.

[Preuve

$\exists$ un syst. de coord. y dans lequel $D = g_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + g_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ s'écrit $\tilde{D} = \tilde{D}_s + \tilde{D}_N$ c dans 3.1.

On a $y = \varphi(x)$ et $x = \psi(y)$ $(\psi = \varphi^{-1})$.

(φ induit Φ sur les opérateurs, et $\tilde{D} = \Phi(D)$).

Alors on a encore :
$$\tilde{D} \tilde{f} = \lambda \tilde{f} \quad \text{où} \quad \tilde{f} = f \circ \psi .$$
En effet :
$$\tilde{D} := \Phi(D) = \sum_{i,j} g_i(\psi(y)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\psi(y)) \frac{\partial}{\partial y_j}$$
$$\frac{\partial (f \circ \psi)}{\partial y_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\psi(y)) \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial y_j}(y).$$

D'où

$$\tilde{D}\tilde{f} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g_i(\Psi(y))\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\Psi(y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(\Psi(y))\,\frac{\partial \Psi_k}{\partial y_j}(y)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g_i(\Psi(y))\,\frac{\partial f}{\partial x_k}(\Psi(y))\,\underbrace{\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \Psi_k}{\partial y_j}(y)\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\Psi(y))\right]}_{(*)}$$

Or $(*) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Psi_k}{\partial y_j}(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial(\Psi_k\circ\varphi)}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial x_k}{\partial x_i}(x) = \delta_{i,k}$.

Donc

$$\tilde{D}\tilde{f} = \sum_{i=1}^{n} g_i(\Psi(y))\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(\Psi(y)) = d\, f(\Psi(y)) \quad \text{par hyp. sur } f$$

$$= d\,\tilde{f}(y).$$

Alors, d'après la prop 3.2, $\tilde{D}_s\tilde{f} = d\tilde{f}$,

donc $\tilde{f}$ est une série F.Q.H. de type $(d;\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, où les α_i sont les valeurs propres de $\left.\frac{\partial(g_1,\dots,g_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\right|_{x=0}$.

[cf preuve de : 3.1 → la déf. de $\tilde{D}_s$,
et le début du §2 → les v.p. de $\frac{\partial D}{\partial x}$].

□]

---

§4 Hypersurfaces à singularités isolées

Les résultats préparatoires des paragraphes précédents vont nous permettre de résoudre le problème.

<u>Théorème 4.1</u>

Soit $f \in \mathbb{C}\{x_1,\dots,x_n\}$, avec $f(0)=0$.
Si f a une singularité isolée à l'origine, et s'il existe $g_i \in \mathbb{C}\{x_1,\dots,x_n\}$ $(i=1,\dots,n)$ tels que

$$f = g_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + g_n\frac{\partial f}{\partial x_n} \quad (1),$$

alors il existe un changement de coordonnées $\varphi \in \mathbb{C}\{x_1,\dots,x_n\}$ tel que $f\circ\varphi$ soit un polynôme quasi-homogène.

Pour prouver ce résultat, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.2

Sous les hypothèses du théorème 4.1, il vient

$$g_1(0) = \text{———} = g_n(0) = 0.$$

Preuve [du lemme 4.2]

Intégrons le champ de vecteurs

$$X = g_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \text{———} + g_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

dans un voisinage convenable V de 0.

Nous obtenons

$$\exp(Xt)(x) \qquad , |t| < \varepsilon \quad , x \in V.$$

[$\exp(Xt)(x) := \gamma(t,x)$ courbe intégrale passant en x à $t=0$:

$$\frac{d}{dt}\gamma(t,x) = X(\gamma(t,x)) \quad \text{et} \quad \gamma(0,x) = x. \text{]}$$

La condition (1) du théorème 4.1 est donc équivalente à

$$e^t f(x) = f(\exp(Xt)(x)) \quad , \text{ pour } |t| < \varepsilon \; , x \in V \quad (2).$$

[(1) ⇒ (2) :

$$\begin{aligned}
(f \circ \gamma)'(t) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot X_i(\gamma(t)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot g_i(\gamma(t)) \\
&= \left(\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g_i\right] \circ \gamma\right)(t) \\
&= (f \circ \gamma)(t)
\end{aligned}$$

D'où

$$(f \circ \gamma)(t) = (f \circ \gamma)(0) \cdot e^t = f(x)\, e^t.$$

? (2) ⇒ (1)]

Dérivons (2) par rapport à $x_1, \to x_n$ et évaluons l'expression à l'origine.

Nous obtenons :

$$e^t\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \to \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\Big|_{x=0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \to \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\Big|_{x=\exp(tX)(0)} \frac{\partial \exp(Xt)}{\partial(x_1, \to x_n)}\Big|_{x=0}$$

(3)

Puisque 0 est un point singulier de f,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \to \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\Big|_{x=0} = (0, \to 0).$$

Comme $\det\left(\dfrac{\partial \exp(Xt)}{\partial(x_1, \to x_n)}\right) \neq 0$, il vient aussi

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \to \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\Big|_{x=\exp(tX)(0)} = (0, -, 0) \qquad (3').$$

[$\left(\dfrac{\partial \gamma_i}{\partial x_j}\right)'(t,x) = \dfrac{\partial}{\partial x_j}(\gamma_i')(t,x) = \dfrac{\partial}{\partial x_j}(g_i(\gamma(t,x)))$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(\gamma(t,x)) \cdot \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_j}(t,x)$$

i.e. $\left(\left(\dfrac{\partial \gamma_i}{\partial x_j}\right)\right)' = \left(\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_k}(\gamma(t,x))\right)\right) \cdot \left(\left(\dfrac{\partial \gamma_k}{\partial x_j}\right)\right)$

↳ système fondamental de solutions

système linéaire $Y_t'(t,x) = A(t,x)\, Y(t,x)$.

le wronskien $\det\left(\left(\dfrac{\partial \gamma_k}{\partial x_j}\right)(t,x)\right) = C\, e^{\int \operatorname{Tr} A(t,x)\, dt}$

? $C \neq 0 \Rightarrow$ ce det. n'est jamais nul

]

S'il existait un indice i tel que $g_i(0) \neq 0$, [$X(0)$ ne serait pas nul], donc [la courbe intégrale] $\exp(tX)(0)$ ne serait pas constante, et l'origine ne pourrait plus être une singularité isolée.

[cf (3') : $\forall t$, le pt $\exp(tX)(0)$ annulerait les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ (et donc f aussi par hyp. (1), ou d'après (2) : $f(\exp(tX)(0)) = e^t f(0) = 0$].

$\square$

<u>Remarque</u> : Le lemme <u>4-2</u> peut aussi s'obtenir à partir de résultats de Rossi [7].

<u>Preuve du théorème 4.1</u>

Considérons f comme un élément de $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$.
D'après le lemme <u>4-2</u>, f doit être une fonction propre d'un opérateur différentiel (au sens de §2) pour la valeur propre 1.
D'après le corollaire <u>3-3</u>, il existe un changement de coordonnées φ (formel) tel que $f \circ \varphi$ soit une série F.Q.H. de type $(1; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ pour certains $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
Donc, d'après la proposition <u>1-3</u>, il existe un polynôme Q.H. P en n variables, et des coordonnées $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, tels que

$$P(y_1(x), \ldots, y_n(x)) = f(x).$$

Naturellement, le polynôme P est une série convergente.
Maintenant nous considérons l'équation en les coordonnées $y_1, \ldots, y_n$ de $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$:

$$f(x) = P(y(x)) \qquad (4)$$

pour f et P fixés.

Puisque (4) a une solution formelle, un théorème de Artin [1] assure que cette équation admet aussi des solutions convergentes $y_1, \dots, y_n$ (i.e. $y_i \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$, $i = 1, \dots, n$).

$\square$

Le lemme suivant montre que le type d'un polynôme Q.H. ne dépend que de l'ensemble de ses racines.

<u>Lemme 4.3</u>

Soit R un anneau local, isomorphe à l'anneau des séries formelles complexes en n variables.
Soit $P \in R$ ayant les propriétés suivantes:

- P a une singularité isolée à l'origine,
- dans un système de coordonnées $x = (x_1, \dots, x_n)$, P est un polynôme Q.H. de type $r = (r_1, \dots, r_n)$,
- il existe u une unité de R, et un système de coordonnées $y = (y_1, \dots, y_n)$ tels que, dans les coordonnées y, uP soit un polynôme Q.H. de type $s = (s_1, \dots, s_n)$.

Alors $(r_1, \dots, r_n)$ et $(s_1, \dots, s_n)$ coïncident à une permutation près.

<u>Preuve</u>

On obtient immédiatement, d'après les hypothèses, que uP est un polynôme Q.H. de type $(r_1, \dots, r_n)$ en $(u^{r_1}x_1, \dots, u^{r_n}x_n)$

? (on doit choisir convenablement les branches lors de la définition de $u^{r_1}, \dots, u^{r_n}$).

$$\left[uP = \sum_{\sum r_j i_j = 1} a_I \, u x^I = \sum_{\sum r_j i_j = 1} a_I \, u^{\sum r_j i_j} x^I = \sum_{\sum r_j i_j = 1} a_I (u^{r_1} x_1)^{i_1} \cdots (u^{r_n} x_n)^{i_n} \right]$$

On peut donc, sans perte de généralité, supposer dès le début que $u = 1$.

Comme P est Q.H. de type $(r_1, \ldots, r_n)$ relativement à y, on obtient à l'aide du lemme 2-3 (i) qu'il existe $g_1, \ldots, g_n$ dans R tels que P s'écrive sous la forme

$$P = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial P}{\partial x_i} ,$$

et que $r_1, \ldots, r_n$ soient les valeurs propres de la matrice jacobienne $\left.\frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|_0$.

Développons g_i en fonctions propres de $D = r_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + r_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ (cf lemme 2-3 (iii)) :

$$g_i = \sum_{\mu} g_{i,\mu} \quad , \; i = 1, \ldots, n.$$

Par unicité du développement, on déduit de $P = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial P}{\partial x_i}$ que :

$$P = \sum_{i=1}^{n} g_{i,r_i} \frac{\partial P}{\partial x_i} ,$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} g_{i,r_i+\mu} \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad \text{pour } \mu \neq 0.$$

[En effet, P est Q.H. de type $(r_1, \ldots, r_n)$, donc

$$P = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (*)$$

i.e. P est fonction propre de D pour la v.p. 1.

D'autre part,
$$P = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial P}{\partial x_i}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\mu} g_{i,\mu} \right) \frac{\partial P}{\partial x_i}$$
$$= \sum_{\mu} \left(\sum_{i=1}^{n} g_{i,\mu} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right)$$

$$\mathcal{D}\left(g_{i,\mu}\frac{\partial P}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \left(\frac{\partial g_{i,\mu}}{\partial x_j}\frac{\partial P}{\partial x_i} + g_{i,\mu}\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

$$= \mathcal{D}\left(g_{i,\mu}\right)\frac{\partial P}{\partial x_i} + \left(\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}\right) g_{i,\mu} .$$

Or dériver (*) donne :

$$\frac{\partial P}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_i} + r_j \frac{\partial P}{\partial x_j}$$

D'où

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} = (1-r_i)\frac{\partial P}{\partial x_i} \qquad (\blacktriangle) .$$

Donc

$$\mathcal{D}\left(g_{i,\mu}\frac{\partial P}{\partial x_i}\right) = \mu\, g_{i,\mu}\frac{\partial P}{\partial x_i} + (1-r_i) g_{i,\mu}\frac{\partial P}{\partial x_i}$$

$$= (1-r_i+\mu)\, g_{i,\mu}\frac{\partial P}{\partial x_i}$$

$P = \sum_{\mu}\left(\sum_{i=1}^{n} g_{i,\mu}\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)$ est donc la décomposition de P

comme somme de fonctions propres de $\mathcal{D}$.

Alors, par unicité de cette décomposition,

$$P = \sum_{i=1}^{n} g_{i,r_i}\frac{\partial P}{\partial x_i} ,$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} g_{i,\mu}\frac{\partial P}{\partial x_i} \quad \text{pour } \mu \neq r_i .$$

D'où le résultat annoncé.]

[P ayant une singularité isolée à l'origine,] $\frac{\partial P}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial P}{\partial x_n}$

est un système de paramètres de R.

Donc pour $\mu \neq 0$, $g_{i,r_i+\mu}$ est dans l'idéal $\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}, \dots, \widehat{\frac{\partial P}{\partial x_i}}, \dots, \frac{\partial P}{\partial x_n}\right)$.

En particulier, $g_{i,r_i+\mu} = 0$ pour $\mu < 0$ puisque $r_j \leq \frac{1}{2}$, $j = 1, \dots, n$.

[Pour $\mu < 0$, $g_{i,r_i+\mu}$ est F. Q. H. de type $(r_i+\mu; r_1, \dots, r_n)$ avec $r_i + \mu < \frac{1}{2}$.

$g_{i,r_i+\mu} \in \left(\frac{\partial P}{\partial x_1}, \dots, \widehat{\frac{\partial P}{\partial x_i}}, \dots, \frac{\partial P}{\partial x_n}\right) \Rightarrow g_{i,r_i+\mu}$ est combinaison de polynômes F. Q. H. de type $(1-r_j; r_1, \dots, r_n)$, $j = 1, \dots, n$ (cf (▲)). Or $r_j \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - r_j \geq \frac{1}{2}$]

Par conséquent, les valeurs propres de $\left.\frac{\partial(g_{1,r_1}, \dots, g_{n,r_n})}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right|_{x=0}$?

coïncident avec celles de $\left.\frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right|_{x=0}$.

On peut alors trouver un système de coordonnées $z = (z_1, \dots, z_n)$ tel que :

(i) $D' = \sum_{i=1}^{n} g_{i,r_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$ possède, relativement à z, la forme normale $D'_S + D'_N$, avec $D'_S = \sum_{i=1}^{n} s_{j_i} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$,

(ii) z_i est un polynôme F. Q. H. de type $(r_i; r_1, \dots, r_n)$ relativement à x, $i = 1, \dots, n$.

Pour cela, soit $j_1, \dots, j_n$ une permutation de $1, \dots, n$, dont le choix est soumis à certaines contraintes à cause de (ii).

La proposition 3.1 garantit l'existence d'un système de coordonnées z remplissant la condition (i) ; pour obtenir aussi (ii), il faut modifier de manière adéquate la preuve de 3.1.

Relativement au système de coordonnées z, P est un polynôme Q. H., à la fois de type $(r_1, \dots, r_n)$, et de type $(s_{j_1}, \dots, s_{j_n})$.

D'après le corollaire 1.6, $(r_1, \dots, r_n) = (s_{j_1}, \dots, s_{j_n})$.

[——— 1.7]

□

Bibliographie

1. M. Artin : On the solution of analytic equations.
Inventiones math. 5, 277-291 (1968)

2. E. Brieskorn : Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen.
Manuscripta mathematica 2, 103-161 (1970).

3. E. Brieskorn : Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten.
Inventiones math. 2, 1-14 (1966)

4. J. Milnor, P. Orlik : Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials.
Topology 9, 385-393 (1970).

5. H-J. Reiffen : Das Lemma von Poincaré für holomorphe Differentialformen auf komplexen Räumen.
Math. Zeitschrift 101, 269-284 (1967)

6. H-J. Reiffen : Kontrahierbare eindimensionale Hyperflächen.
Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen. II
Math. Phys. Klasse 3, 39-46 (1968)

7. H. Rossi : Vector fields on analytic spaces.
Ann. of Math (2) 78, 455-467 (1963)

8. M. Sebastiani : Preuve d'une conjecture de Brieskorn.
Manuscripta mathematica 2, 301-308 (1970).

Annexe 2

cf M. Artin - On the Solutions of Analytic Equations in Inventiones Math. t 5 p 277-291 1968

k est un corps de caractéristique 0.

On considère un système d'équations analytiques

$$f(x,y) = 0 \qquad (1)$$

où $f(x,y) = (f_1(x,y), \ldots, f_m(x,y))$ sont des séries convergentes en les variables $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$.

On cherche les solutions de (1) tq les y_ν soient des séries convergentes en x.

Théorème

Supposons que $\bar{y}(x) = (\bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_N(x))$, $\bar{y}_\nu(x) \in k[[x]]$ soient des séries formelles sans terme constant, formant une solution de (1), ié tq $f(x, \bar{y}(x)) = 0$.

Soit un entier c.

Alors il existe une solution convergente $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_N(x))$ de (1) tq $y(x) \equiv \bar{y}(x)$ (modulo m^c)

[m désigne l'idéal maximal de l'anneau $k[[x]]$].

La condition de congruence signifie que les coefficients des monômes de degré $< c$ coïncident ds $y_\nu(x)$ et $\bar{y}_\nu(x)$.

[Autre formulation du résultat : les solutions analytiques sont denses dans l'espace des solutions formelles muni de sa métrique m-adique].

[Ce th. repose sur le th de préparation de Weierstrass]