SUR le POLYNOME de BERNSTEIN des SINGULARITES SEMI QUASI-HOMOGENES

◇

J. Briançon
Université de Nice

M. Granger
Université d'Angers

Ph. Maisonobe
Université de Nice

◇

Preprint n° 138
Novembre 1986

SUR le POLYNOME de BERNSTEIN des SINGULARITES SEMI QUASI-HOMOGENES

INTRODUCTION

Etant donné un germe de fonction analytique $f \in \mathcal{O} = \mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_n\}$ on sait qu'il existe un polynome non nul $e(s) \in \mathbb{C}[s]$ et un opérateur différentiel à coefficients dans $\mathcal{O}$, dépendant polynomialement de s tels que : $P(s)\, f^{s+1} = e(s)\, f^s$.

On appelle polynome de Bernstein-Sato (en abrégé b-fonction) le générateur unitaire de l'idéal des $e \in \mathbb{C}[s]$ qui satisfont à cette propriété. L'existence de b(s) a été démontrée par Bernstein [Be] dans le cas algébrique et par Björk [Bj] dans le cas général. Il est facile de voir que, dès que $f(0)=0$, b est de la forme $b=(s+1)\tilde{b}(s)$.

Les zéros de $\tilde{b}$ sont rationnels : ceci est démontré par B. Malgrange, pour f à singularité isolée dans [M_2], en mettant en évidence un lien avec la monodromie de f (les valeurs propres de la monodromie sont les $e^{-2i\pi\alpha}$, $\tilde{b}(\alpha)=0$), et par Kashiwara [K] dans le cas général en utilisant la résolution des singularités. Malgrange généralise ensuite son résultat aux singularités non isolées dans [M_3]. Varchenko [V_1] interprète les zéros de $\tilde{b}$ à l'aide d'une filtration voisine de la filtration de Hodge asymptotique.

Ces résultats n'épuisent pas le problème de fournir un calcul explicite de la b-fonction. Cette question a été abordée par plusieurs auteurs : Yano [Y] donne des procédés généraux qui lui permettent de calculer un grand nombre d'exemples. Kato dans [K_1] [K_2] donne deux exemples de calculs complets pour la déformation à μ-constant de x^a+y^b lorsque $(a,b)=(5,7)$ et $(4,9)$. Plus récemment P. Cassou-Noguès a utilisé des arguments de théorie des nombres pour mettre en évidence certaines racines de la b-fonction et calculer la b-fonction générique de

$f = \sum_{i=1}^{n} x_i^{a_i}$, a_i deux à deux premiers entre eux [C.N_1] [C.N_2] [C.N_3].

L'objet de ce travail est d'étudier la b-fonction des singularités semi quasi-homogènes, c'est-à-dire obtenues par petite déformation à polygone de Newton constant d'un polynome quasi homogène f_1 à singularité isolée (ceci implique, et d'après [V_2] équivaut à μ-constant). Nous donnons un algorithme qui permet de calculer la b-fonction ainsi que l'opérateur P(s) (voir §4). Dans le cas n=2 nous calculons la b-fonction générique, c'est-à-dire d'un germe dans un ouvert de Zariski de la déformation semi-universelle de f_1.

Dans les §1 et 2 nous donnons un premier algorithme qui fournit un multiple de la b-fonction. Nous introduisons le sous $\mathcal{D}$-module ($\mathcal{D} = \mathcal{O} < \partial/\partial x_1,\ldots,\partial/\partial x_n >$) de

$\mathcal{O}[s,\frac{1}{f}]\, f^s$ engendré par les $\xi_i = \frac{s!}{(s-i)!} f^{s-i}$ $(s! = \Gamma(s+1))$, que nous notons N.

Pour chaque $B \in N$ nous considérons les polynomes de degré minimum $\tilde{b}_B$ et c_B tels que :

$$(s+1)\,\tilde{b}_B(s)\, B \in \mathcal{D}[s] f^{s+1} \quad \text{et} \quad c_B(s)\, B \in \mathcal{D}[s] f^s.$$

Nous montrons par ailleurs la décomposition

$$N = \mathcal{D}\, J(f)\, f^s \bigoplus (\oplus\, \mathbb{D}\, E\, \xi_i)$$

où J(f) est l'idéal jacobien de f et $\mathbb{D}\,E$ l'ensemble des opérateurs dont les coefficients de l'écriture "à droite" sont un supplémentaire fixé de J(f) dans $\mathcal{O}$. Ceci permet de munir N d'une

Dans le §3 nous montrons que les termes constants à droite des $B \in N$ tels que $\tilde{b}_B=1$ (resp. $c_B=1$) forment modulo $\mathcal{D}\, J(f)\, f^s$ deux sous-espaces vectoriels de dimension finie $Z \subset Z' \subset \bigoplus_{i=0}^{n-1} E\, f^s$. A cet effet nous construisons une suite privilégiée d'éléments $H_0,\dots,H_{\ell-1}$ de $\bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{D}\, \xi_i$ tels que $\tilde{b}_H=1$. Précisément $(s+1)H_\ell = S_\ell\, f^{s+1}$ et S_ℓ est unitaire en s et S_L est un annulateur de f^{s+1}. Ces éléments permettent de décrire un algorithme de calcul explicite de Z et Z'.

Dans le §4, nous démontrons que les racines de la b-fonction $\tilde{b}$ sont simples et sont les $-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \rho$ où α_i est le poids de x_i et où ρ parcourt les poids des différents termes du gradué $\oplus Z'_\rho/Z_\rho$ de Z'/Z. Dans le §5 nous utilisons les constructions précédentes, appliquées sans changement majeur au corps $\mathbb{C}(t)$ à la place de $\mathbb{C}$ pour calculer la b-fonction d'un germe semi quasi-homogène assez général en deux variables. L'ingrédient essentiel est que pour $n=2$ les poids des H_ℓ décrivent en général la suite de tous les poids >1 possibles.

Dans le §6 nous interprétons notre calcul en termes de système de Gauss-Manin en suivant B. Malgrange [M_2] : Soit

$$G_0 = \frac{\Omega^n}{df \wedge \Omega^{n-2}}$$

le réseau de Brieskorn [Br] de f et $\tilde{G}_0$ son saturé pour $\frac{\partial}{\partial t}\, t$ dans le système de Gauss-Manin $H^n(N)$ où $N = \mathcal{D}_{x,t}\, f^s$ (dans la notation de [M_2], à laquelle notre notation du §2 est conforme). On montre alors que Z'/Z est naturellement isomorphe à $\tilde{G}_0 / \frac{\partial^{-1}}{\partial t} \tilde{G}_0$ et on exhibe une base dans laquelle la matrice de $-\frac{\partial}{\partial t} t$ est triangulaire et diagonalisable. Ce problème a aussi été étudié par J. Scherk dans [Sc]. On peut alors appliquer le fait que $\tilde{b}(s)$ est le polynome minimal de cette matrice [M_2] pour retrouver le §4. Les calculs effectués aux §1 à 4 restent nécessaires pour expliciter une base de $\tilde{G}_0$ et on a en outre l'avantage de fournir un algorithme explicite pour le calcul de $\tilde{b}(s)$ et de $P(s)$ et de s'appliquer directement au cas générique.

Nous montrerons dans un prochain travail comment généraliser notre méthode aux singularités non dégénérées par rapport à leur polyèdre de Newton.

§1 - Singularités semi quasi-homogènes

Soit $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ un n-uple de rationnels strictement positifs. On définit une fonction de poids ρ sur $\mathcal{O}=\mathbb{C}\{x_1,\dots,x_n\}$ de la manière habituelle : Si $f=\Sigma f_I x^I$ est un élément non nul de $\mathcal{O}$, le poids de f est $\rho(f)=\inf\{<\alpha,I>=\alpha_1 i_1+\dots+\alpha_n i_n, f_I\neq 0\}$ la partie initiale de f est

$$\mathrm{In}(f)=\sum_{<\alpha,I>=\rho(f)} f_I x^I.$$

Nous notons $\mathcal{O}_\rho$ et O_ρ la filtration et la graduation de $\mathcal{O}$ associées :

$$\mathcal{O}_\rho=\{u\in\mathcal{O}\ /\ \rho(u)\geqslant\rho \text{ où } u=0\}$$

$$O_\rho=\{u\in\mathcal{O}\ /\ \rho(u)=\rho \text{ où } u=0\},$$ sous-espace vectoriel des polynomes quasi-homogènes de poids ρ.

On note aussi $\mathcal{O}'_\rho=\{u\in\mathcal{O}\ \ u=0 \text{ ou } \rho(u)>\rho\}$.

1.1 **Définition :** Un élément f de $\mathcal{O}$ est dit semi quasi-homogène pour α si sa partie initiale $\mathrm{In}(f)$ est à singularité isolée à l'origine.

Dans les § 1 à 4 nous fixons $f\in\mathcal{O}$ semi quasi-homogène et nous supposerons, quitte à multiplier α par un rationnel positif que $\rho(f)=1$. Nous notons :

$J(f)=\mathcal{O}(f'_{x_1},\dots,f'_{x_n})$ idéal de $\mathcal{O}$ engendré par les dérivées partielles premières de f appelé idéal jacobien.

$\mathrm{In}\,J(f)$ = Idéal engendré par les parties initiales des éléments de $J(f)$.

$\mathrm{In}_\rho J(f)=O_\rho\cap\mathrm{In}\,J(f)$.

Nous fixons enfin un supplémentaire E_ρ de $\mathrm{In}_\rho J(f)$ dans O_ρ.

1.2 Propriétés élémentaires

Il résulte de la définition que la suite $\mathrm{In}(f'_{x_1}),\dots,\mathrm{In}(f'_{x_n})$ est régulière et engendre l'idéal $\mathrm{In}\,J(f)$. L'exactitude du complexe de Koszul gradué associé à cette suite régulière montre que $d(\rho)=\dim_{\mathbb{C}}E_\rho$ ne dépend que de α et de ρ.

Désignons par σ le poids du socle de l'algèbre artinienne $\mathcal{O}/_{\mathrm{In}\,J(f)}$ (ou $\mathcal{O}/_{J(f)}$), entier minimum satisfaisant à la condition : $\mathcal{O}'_\sigma\subset\mathrm{In}\,F(f)$, ou ce qui revient au même :

$$E_\rho=0 \text{ si } \rho>\sigma.$$

Il est bien connu que

$$\sigma=\rho\,(\mathrm{Det}(f'_{x_i x_j}))=n-2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

Notons encore :

$$\Pi = \{\rho / E_\rho \neq 0\}$$

$$E = \bigoplus_{\rho \in \Pi} E_\rho$$: c'est un supplémentaire de In J(f) ou de J(f) dans $\mathcal{O}$

(Voir le lemme 1.3 ci-dessous).

Le nombre de Milnor de la singularité est donné par :

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}}{J(f)} = \sum_{\rho \in \Pi} d(\rho) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{\alpha_j} - 1\right) \text{ d'après [M.O].}$$

1.3 **Lemme :** Pour tout élément u de $\mathcal{O}$ il existe un unique $v \in E$ et il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{O}^n$ tels que :

$$u = v + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f'_{x_j}, \quad \text{avec}$$

$v = 0$ ou $\rho(v) > \rho(u)$; $\lambda_j = 0$ ou $\rho(\lambda_j) \geqslant \rho(u) - 1 + \rho(x_j)$.

Preuve : Si $\rho(u) > \sigma$, on a $v=0$. L'existence de v se démontre par récurrence descendante sur $\rho(u)$. L'unicité de v et l'existence de λ_j satisfaisant la condition sur le poids est une conséquence du fait que les $\mathrm{In}\, f'_{x_j}$ forment une suite régulière.

1.4 **Le Champ d'Euler**

Soit $\chi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \, \partial/\partial x_j$ et $h = \chi(f) - f$.

Remarquons que $h = \Sigma(\langle \alpha, I \rangle - 1) f_I \, x^I$ satisfait à : $\rho(h) > 1 = \rho(f)$. Quitte à faire un changement de coordonnées nous pouvons supposer :

- Soit $h=0$ si la singularité est quasi-homogène (c'est-à-dire d'après [S] si $f \in J(f)$)
- Soit $\mathrm{In}\, h \in E - \{0\}$ dans le cas contraire.

Considérons dans le $\mathcal{O}$-module $\mathcal{O}[s]\left[\frac{1}{f}\right] f^s$ les éléments $\xi_i = \frac{s!}{(s-i)!} f^{s-i} = s(s-1)\ldots(s-i+1) f^{s-i}$

où $i \in \mathbb{N}$. Les formules suivantes seront à la base de tous nos calculs.

1.5 **Lemme :** Pour tout $u \in \mathcal{O}$, $i \in \mathbb{N}$, $\rho \in \mathbb{C}$, on a la formule suivante

(où $U = u\xi_i$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$) :

$$(*)\quad (s+|\alpha|+\rho)U=\Big[\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\frac{\partial}{\partial x_j}.x_j u+((\rho+i)u-\chi(u))\Big]\xi_i-u\,h\,\xi_{i+1}.$$

Si on se donne en plus $I=(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n$, $D^I=(\frac{\partial}{\partial x_1})^{i_1}\dots(\frac{\partial}{\partial x_n})^{i_n}$, et $V=D^I U$ on a

$$(**)\quad (s+\rho-\chi)V=[(i+\rho+<\alpha,I>-\rho(u))D^I u-D^I(\chi(u)-\rho(u)u)]\,\xi_i-D^I u\,h\,\xi_{i+1}.$$

La formule $(*)$ est une variante de la formule $(**)$ dans le cas particulier $I=0$. Le calcul est laissé au lecteur.

§2 - <u>Un multiple du polynome de Bernstein</u>

2.1 Notations

$\mathcal{D}$ désigne l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathcal{O}$, et $\mathbb{D}\subset\mathcal{D}$ le sous-anneau des opérateurs à coefficients constants.

Nous filtrons $\mathcal{D}$ par le poids des coefficients dans l'écriture à droite où on écrit

$$P=\sum_{I\in\mathbb{N}^n}D^I p_I\quad p_I\in\mathcal{O}\,,\quad D^I=(\frac{\partial}{\partial x_1})^{i_1}\dots(\frac{\partial}{\partial x_n})^{i_n}$$

les éléments de $\mathcal{D}$: $\mathcal{D}\,\mathcal{O}_\rho=\{P/\ \forall I\in\mathbb{N}^n\ p_I\in\mathcal{O}_\rho\}$

$\mathcal{D}\,\mathcal{O}'_\rho=\{P/\ \forall I\in\mathbb{N}^n\ ,p_I\in\mathcal{O}'_\rho\}$

$\mathbb{D}\,O_\rho=\{P/\ \forall I\in\mathbb{N}^n\ ,p_I\in O_\rho\}$

$\mathcal{D}[s]$ désigne l'anneau des opérateurs à coefficients dans $\mathcal{O}[s]$. $\mathcal{O}[s][\frac{1}{f}]f^s$ est un $\mathcal{D}[s]$-module.

On considère les images des filtrations et graduations précédentes dans les sous $\mathcal{D}$-modules $\mathcal{D}\,\xi_i$:

$$\begin{array}{ccccccc}\mathcal{D}\,\mathcal{O}_{\rho+i}\xi_i & \supset & \mathcal{O}_{\rho+i}\xi_i & \supset & O_{\rho+i}\xi_i & \supset & E_{\rho+i}\xi_i\\ & & & & \cap & & \cap\\ & & & & \mathbb{D}\,O_{\rho+i}\xi_i & \supset & \mathbb{D}\,E_{\rho+i}\xi_i\end{array}$$

Nous notons $\mathbb{D}\,E_{\geqslant\rho}.\xi_i=\bigoplus_{\rho'\geqslant\rho}\mathbb{D}\,E_{\rho'}.\xi_i.$

2.2 Lemme :

a) L'application naturelle $\mathbb{D}\,E\longrightarrow\mathbb{D}\,E\,.\,\xi_i$ est bijective.

b) $\mathcal{D}\,\mathcal{O}_{\rho+i}\xi_i\subset\mathcal{O}_{\rho+i-1}\,\xi_{i-1}\oplus\mathbb{D}\,E_{\geqslant\rho+i}\,\xi_i$ pour $i\geqslant1$

$\mathcal{D}\,\mathcal{O}_\rho\,f^s\subset\mathcal{D}\,J(f)_{\geqslant\rho}\,f^s\oplus\mathbb{D}\,E_{\geqslant\rho}\,.\,f^s.$

ou pour $\rho\leqslant0$ on pose $\mathcal{O}_\rho=\mathcal{O},\ E_{\geqslant\rho}=E.$

c) $$\sum_{i=0}^{N} \mathcal{D}\,\mathcal{O}_{\rho+i}\,\xi_i = \mathcal{D}\,J(f)_{\geqslant\rho}\,f^s \oplus \Big[\bigoplus_{i=0}^{N} \mathbb{D}\,E_{\geqslant\rho+i}\,\xi_i\Big]$$

$$N = \Sigma\,\mathcal{D}\,\xi_i = \mathcal{D}\,J(f)\,f^s \oplus \big[\bigoplus \mathbb{D}\,E\,\xi_i\big].$$

Preuve : – Montrons d'abord que la relation :

$$(u_0' + u_0)f^s + u_1\xi_1 + \ldots + u_N\xi_N = 0$$

avec $u_0' \in \mathcal{D}\,J(f)$ et $u_i \in \mathbb{D}E$ implique $u_0 = \ldots = u_N = 0$.
(Ceci démontre a) et l'existence des sommes directes dans b) et c).)

Si $N=0$, on trouve que $u_0' + u_0$ appartient à l'anulateur dans $\mathcal{D}$ de f^s donc d'après [M_2] et [Y], à l'idéal à gauche de $\mathcal{D}$ engendré par les opérateurs

$\dfrac{\partial}{\partial x_j} f'_{x_k} - \dfrac{\partial}{\partial x_k} f'_{x_j}$, donc :

$$u_0 \in \mathbb{D}E \cap J(f) = 0 \text{ et } u_0' f^s = 0.$$

Pour $N>0$, en substituant $s=0$ on trouve $(u_0'+u_0)(1)=0$ donc $u_0 + u_0 = \sum_{j=1}^{n} v_j\,\partial/\partial x_j$. Après simplification par s nous obtenons :

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} v_j f'_{x_j} + u_1\Big) f^{s-1} + u_2 \frac{(s-1)!}{(s-2)!} f^{s-2} + \ldots + u_N \frac{(s-1)!}{(s-N)!} f^{s-N} = 0.$$

La substitution de $s+1$ à s permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence : $u_1 = \ldots = u_N = 0$, donc $(u_0'+u_0)\,f^s = 0$ et enfin $u_0 = u_0' f^s = 0$.

– L'affirmation c) découle de b) de façon évidente.
Reste à montrer b) qui est donné par le lemme de division 1.3 :

Soit $u \in \mathcal{O}_{\rho+i}$, $u = v + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_{x_j}$ avec $v \in E$, $\rho(v) \geqslant \rho(u)$, $\rho(\lambda_j) \geqslant \rho(u) - 1 + \alpha_j$.

D'où $D^I u.\xi_i = D^I v\,\xi_i + \sum_{j=1}^{n} D^I \lambda_j f'_{x_j}\,\xi_i$.

Ceci donne le résultat pour $i=0$ et pour $i \geqslant 1$ il suffit de remarquer :

$$\lambda_j f'_{x_j}\xi_i = \lambda_j \frac{s!}{(s-i+1)!}\frac{\partial}{\partial x_j} f^{s-i+1} = \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}.\lambda_j - \frac{\partial\lambda_j}{\partial x_j}\Big)\xi_{i-1}.$$

Comme $\rho(\lambda_j) > \rho\Big(\dfrac{\partial\lambda_j}{\partial x_j}\Big) \geqslant \rho(u) - 1 \geqslant \rho + i - 1$ on peut réécrire $D^I u\,\xi_i$ dans

$\mathbb{D}E_{\geqslant\rho+i}\,\xi_i \oplus \mathcal{D}\,\mathcal{O}_{\rho+i-1}\,\xi_{i-1}$ d'où b).

N.B. L'assertion 2.2.b) reste valable pour $\rho<0$ (avec $\mathcal{O}_\rho=\mathcal{O}_0$ et $\mathbb{D}E_{\geqslant\rho}=\mathcal{D}E$ si $\rho<0$).

2.3 Remarque sur le poids de l'opérateur

Appelons poids de $D^I u$ le rationnel $\rho(u)-\langle I,\alpha\rangle=\rho(D^I u)$ et poids de $P=\Sigma D^I u_I$: $\rho(P)=\inf\{\rho(D^I u_I), u_I\neq 0\}$.

On remarque que dans la réécriture précédente

$$P\xi_i=Q\xi_i+R\xi_{i-1}.$$

On a $\rho(Q)\geqslant\rho(P)$, $\rho(R)\geqslant\rho(P)-1$ et en ce qui concerne les degrés des opérateurs : $d(Q)\leqslant d(P)$, $d(R)\leqslant d(P)+1$. Ainsi on peut réécrire $P.\xi_i\in\mathcal{D}.\xi_i$ sous la forme

$$P_i\xi_i+P_{i-1}\xi_{i-1}+\ldots+P_0\xi_0+P'_0\xi_0$$

avec $\rho(P_j)\geqslant\rho(P)-i+j$, $d(P_j)\leqslant d(P)+i-j$ et $P_i\in\mathbb{D}E$, $P'_0\in\mathbb{D}J(f)$.

2.4 Lemme : Soit $U\in\mathcal{D}\mathcal{O}_{\rho+i}.\xi_i$

a) $(s+|\alpha|+\rho)U\in\mathcal{D}\mathcal{O}_{\rho+i}.\xi_i+\mathcal{D}\mathcal{O}_{\rho+i+\rho(h)}.\xi_{i+1}$.

b) Pour tout polynome $e\in\mathbb{C}[s]$

$$[e(s)-e(-|\alpha|-\rho)].U\in\mathcal{D}\mathcal{O}_{\rho+i}.\xi_i+\sum_{\ell=1}^{\deg(e)}\mathcal{D}\mathcal{O}_{\rho+i+\ell\rho(h)}.\xi_{i+\ell}.$$

<u>Preuve</u> : Pour démontrer ce lemme il suffit de le faire pour $U=u.\xi_i$, avec $u\in\mathcal{O}_{\rho+i}$.
La partie a) est une conséquence immédiate de la formule (*) :

$$(s+|\alpha|+\rho)U=\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\,\partial/\partial x_j\,x_j\,u+(\rho+i)u-\chi(u)\Big)\xi_i-u\,h\,\xi_{i+1}.$$

Il suffit de constater que :

$\rho(x_j u)>\rho(u)\geqslant\rho+i$, $\rho(uh)\geqslant\rho+i+\rho(h)$

$\rho((\rho+i)u-\chi(u))\geqslant\rho(u)\geqslant\rho+i$, une (et une seule) de ces deux inégalités étant stricte.

Démontrons b) par récurrence sur le degré de e. Pour deg e=1 c'est l'assertion a).
Supposons $e(s)=(s+\lambda)e'$ et par hypothèse de récurrence :

$$[e'(s)-e'(-|\alpha|-\rho)]U=U_i+\sum_{\ell=1}^{\deg(e)}U_{i+\ell}\quad\text{avec}\quad U_i\in\mathcal{D}\mathcal{O}_{\rho+i}\xi_i,$$

$$U_{i+\ell}\in\mathcal{D}\mathcal{O}_{\rho+i+\ell\rho(h)}\xi_{i+\ell}.$$

On déduit de a) pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$:

$$(s+\lambda)U=(s+|\alpha|+\rho)U+(\lambda-|\alpha|-\rho)U\in\mathcal{D}\mathcal{O}_{\rho+i}\xi_i+\mathcal{D}\mathcal{O}_{\rho+i+\rho(h)}.\xi_{i+1}.$$

Pour obtenir le résultat voulu pour e(s) il suffit d'appliquer ce résultat à $(s+\lambda)U_i$, $(s+\lambda)U_{i+\ell}$ ainsi que l'assertion a) pour U et de reporter dans :

$$e(s)-e(-|\alpha|-\rho)U = [(s+\lambda)(e'(s)-e'(-|\alpha|-\rho))+e'(-|\alpha|-\rho)(s+|\alpha|+\rho)]\,U$$

$$= (s+\lambda)U_1 + \sum_{\ell=1}^{\deg(e)-1} (s+\lambda)U_{1+\ell} + e'(-|\alpha|-\rho)(s+|\alpha|+\rho)\,U.$$

2.5 **Définition :** Pour $U \in \mathcal{O}[s][\frac{1}{f}]f^s$ nous définissons :

$\tilde{b}_U \in \mathbb{C}[s]$ est le polynome unitaire de degré minimum tel que :

$$(s+1)\,\tilde{b}_U\,U \in \mathcal{D}[s]f^{s+1}$$

$C_U \in \mathbb{C}[s]$ est le polynome unitaire de degré minimum tel que :

$$C_U\,U \in \mathcal{D}[s]\,f^s.$$

<u>Remarque</u> : Soit $P(s) = (s+1)\,Q(s) + P(-1)$ un opérateur tel que :
$P(s)\,f^{s+1} = (s+1)\tilde{b}_U\,U$.

On a $P(-1)1 = 0$ donc $P(-1) = \sum_{i=1}^{n} A_i\,\partial/\partial x_i$ et on tire :

$$\tilde{b}_U\,U = (Q(s)f + \sum_{i=1}^{n} A_i f'_{x_i})f^s \in \mathcal{D}(s)f^s.$$

Donc C_U divise $\tilde{b}_U$.

2.6 **Proposition :** Soit $U \in \mathcal{D}\,\mathcal{O}_{\rho+i}\cdot\xi_i$

$\tilde{b}_U$ divise $\left[\prod_{\rho'\in\mathcal{P}_\rho} (s+|\alpha|+\rho')\right]_{red}$, le produit étendu à l'ensemble $\mathcal{P}_\rho$ des $\rho' \in \mathbb{Q}$ vérifiant :

$\exists j \in \mathbb{N} \quad \rho'+j \in \Pi,\ \rho' \geq \rho + (j-i)_+\,(\rho(h)-1)$.

(où $\lambda_+ = \max(\lambda, 0)$ et e_{red} désigne pour $e \in \mathbb{C}[s]$ le polynome sans racine multiple ayant les mêmes racines et le même coefficient dominant que e).

<u>Preuve</u> : D'après le lemme 2.2 - b), si $\rho > \sigma$ on a

$$U \in \mathcal{D}\,J(f).\,f^s$$

donc $(s+1)\,U \in \mathcal{D}[s]\,f^{s+1}$ et $\tilde{b}_U = 1$.

Supposons l'assertion démontrée pour tout (ρ', i') tel que $\rho' > \rho$, ou $(\rho'=\rho\ ,\ i' < i)$.

Si $(\rho+i) \in \Pi$, on écrit d'après le lemme 2.4 :

$(s+|\alpha|+\rho)U = U_1 + U_2 \qquad U_1 \in \mathcal{D}\,\mathcal{O}_{\rho+i}\,\xi_i\ ,\ U_2 \in \mathcal{D}\,\mathcal{O}_{\rho+i+\rho(h)}\cdot\xi_{i+1}$.

Si $\rho + i \notin \Pi$ on écrit d'après le lemme 2.2 :

$$U = U_1 + U_2 \quad , U_1 \in \mathcal{D}\, \mathcal{O}'_{\rho+i}\, \xi_i \ , \ \begin{cases} U_2 \in \mathcal{D}\, J(f)\, f^s & \text{si } i = 0 \\ U_2 \in \mathcal{D}\, \mathcal{O}_{\rho+i-1}\, \xi_{i-1} & \text{si } i \geqslant 1 \end{cases}$$

Dans le premier cas on a $\rho \in \mathcal{P}_\rho$ et l'hypothèse de récurrence montre que $\tilde{b}_{U_1}$ et $\tilde{b}_{U_2}$ divisent le polynome :

$$\prod_{\substack{\rho' \in \mathcal{P}_\rho \\ \rho' > \rho}} (s+|\alpha| + \rho')$$

Dans le deuxième cas $\tilde{b}_{U_1}$ et $\tilde{b}_{U_2}$ divise $\prod_{\rho' \in \mathcal{P}_\rho} (s+|\alpha|+\rho)$ d'après l'hypothèse de récurrence et pour $i=0$ parce que $\tilde{b}_{U_2}=1$. La proposition 2.6 en résulte pour $\tilde{b}_U$ dans les deux cas.

En prenant $U=f^s$ dans la proposition 2.6 on obtient :

2.7 **Corollaire :** La b-fonction de f divise le polynome

$$(s+1) \Big[\prod_{j=0}^{n-1} \Big(\prod_{\substack{\omega \in \Pi \\ \omega \geqslant j\rho(h)}} (s+|\alpha| + \omega - j) \Big) \Big]_{red}$$

§3 – <u>Construction d'un bon opérateur dans l'annulateur de f^s</u>

La remarque 2.3 conduit à munir $\oplus\, \mathbb{D}\, E\, \xi_i$ de la filtration (ou de la graduation) fournie par la fonction de poids suivante :

$$\rho\Big(\sum_{i=0}^{N} U_i \xi_i\Big) = \inf_i(\rho(U_i) - i)$$

Tout élément $P = \Sigma\, P_i\, \xi_i$ de $\bigoplus_{i=1}^{N} \mathcal{D}\, \xi_i$ admet d'après 2.2 et 2.3 une réécriture unique

$P = U + U'_0\, f^s$, $U = \sum_{i=1}^{N} U_i\, \xi_i$ avec $U_i \in \mathbb{D}\, E$ et $U_0 \in \mathcal{D}\, J(f)$ et on pose :

$$\rho(P) = \rho(U). \quad \text{On a} : \rho(P), \rho(U'_0) \geqslant \inf \rho(P_i) - i\,.$$

3.1 **Lemme :** Soit $U = \sum_{i=0}^{N} U_i\, \xi_i \in \bigoplus_{i=0}^{N} \mathbb{D}\, E\, \xi_i$ avec $\rho(U) + N + \rho(h) > \sigma$.

On a : $(s+\rho(U) - \chi)U = W + R\, f^s$, avec :

$$\begin{cases} R \in \mathcal{D}\, J(f)\ ,\ \rho(R) > \rho(U) \\ W = \sum_{i=0}^{N} W_i \xi_i\ ,\ W_i \in \mathbb{D}\, E,\ \rho(W) > \rho(U) \end{cases}$$

Enfin, concernant le degré des opérateurs :

$\deg W_0$, $\deg R \leqslant \sup\{\deg U_j + j + 1 / j = 0,\dots,N\}$

$\deg W_i \leqslant \sup\{\deg U_j + j - i + 1,\ j = i-1,\dots,N\}$ pour $i \geqslant 1$.

<u>Preuve</u> : L'expression $W + R f^s$ est obtenue en appliquant la formule ($**$) :

$$(**)\ (s+\rho(U)-\chi)D^I u \xi_i = [(i+\rho(U)+<\alpha,I>-\rho(u))D^I u - D^I(\chi(u)-\rho(u)u]\xi_i - D^I u h \xi_{i+1}$$

à chaque terme de U puis le lemme de réécriture 2.2.

- A priori $W \in \bigoplus_{i=0}^{N+1} \mathbb{D} E.\xi_i$, mais si $i=N$ $\rho(D^I u \xi_N) \geqslant \rho(U)$, on a :

  $\rho(uh) \geqslant \rho(h)+\rho(U)+N+<\alpha,I> > \sigma$, donc $D^I u h \xi_{N+1} \in \mathcal{D}\, J(f)\xi_{N+1} \subset \mathcal{D}\xi_N$.
- Les conditions sur les poids de W et R résultent de la remarque précédant le lemme et du fait que le deuxième membre de ($**$) a un poids $> \rho(U)$:

(a) $(i+\rho(U)+<\alpha,I>-\rho(u))D^I u$ est nul si $\rho(D^I u \xi_i) = \rho(U)$ et sinon de poids $\rho(D^I u) > \rho(U)+i$.

(b) $\rho(D^I(\chi(u)-\rho(u)u)) > \rho(D^I u) \geqslant \rho(U)+i+1$

(c) $\rho(D^I uh) = \rho(D^I u) + \rho(h) \geqslant \rho(U)+i+\rho(h) > \rho(U)+i$

- Les conditions sur les degrés se déduisent immédiatement de la remarque 2.3 et de la formule ($**$) sous la forme :

  $$(s+\rho(U)-\chi)U = \sum_{i=0}^{N+1} P_i \xi_i,\ d(P_0) \leqslant d(U_0), d(P_i) \leqslant \max(d(U_{i-1}), d(U_i)).$$

3.2 **Proposition** : Il existe une suite de rationnels $\rho_0=1 < \rho_1=\rho(h)<\rho_2 \dots<\rho_L$ et pour $\ell=0,1,\dots,L-1$:

- des éléments $H_\ell = \sum_{i=0}^{n-2} H_{\ell,i}\xi_i$ de $\bigoplus_{i=0}^{n-2} \mathbb{D}E\xi_i$ vérifiant :

  $\rho(H_\ell) = \rho_{\ell+1}, \rho(H_{\ell,i}) \geqslant (i+1)\rho(h)$, $\deg(H_{\ell,i}) \leqslant \ell - i$
- des opérateurs $T_\ell \in \mathcal{D}$ vérifiant $\rho(T_\ell) > \rho_\ell - 1$, $\deg(T_\ell) \leqslant \ell+1$

tels que les opérateurs $S_\ell \in \mathcal{D}[s]$, définis pour $\ell=0,\dots,L$ par :

$$S_0=(s+1-\chi)-T_0$$

$$S_{\ell+1}=(s+\rho_{\ell+1}-\chi)S_\ell - T_{\ell+1} \quad \text{pour } \ell=0,\dots,L-1$$

satisfassent à : $S_\ell f^{s+1}=(s+1)H_\ell$ pour $0 \leqslant \ell \leqslant L-1$

$S_L f^{s+1}=0$.

Preuve : On a $(s+1-\chi) f^{s+1} = -(s+1) h f^s$, on peut écrire (lemme 1.3)

$$h = h_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f'_{x_j}\ h_0 \in E,\ \rho(\lambda_j f'_{x_j}) > \rho(h_0) = \rho(h), \text{d'où } H_0 = h_0 f^s,\ T_0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Supposons construits $(\rho_{\ell'}, S_{\ell'}, H_{\ell'})$ vérifiant les propriétés demandées pour $\ell' \leqslant \ell$ avec $H_\ell \neq 0$, $\rho(H_\ell) > \rho_\ell$. On pose $\rho_{\ell+1} = \rho(H_\ell)$ et en appliquant 3.1 $(\rho(H_\ell)+n-2+\rho(h) > \sigma)$:

on trouve : $(s+\rho_{\ell+1}-\chi) H_\ell = H_{\ell+1} + R_{\ell+1} f^s$

avec $H_{\ell+1} = 0$ (et dans de cas on pose $L = \ell+1$), ou

$\rho(H_{\ell+1}) > \rho_{\ell+1}$, $\rho(R_{\ell+1}) > \rho_{\ell+1}$.

Plus précisément on a, d'après la preuve du lemme 3.1, inégalité **(c)** :

$$\rho(H_{\ell+1,i} \cdot \xi_i) \geqslant \operatorname{Inf}\{\rho(H_{\ell,j}\, \xi_j) + (j-i)(\rho(h)-1),\ j=0,\dots,i\}$$

d'où on tire par récurrence sur ℓ la condition sur le poids de $H_{\ell,j}$.

Enfin $R_{\ell+1} \in \mathcal{D} J(f)$, ce qui permet d'écrire de la manière habituelle :

$(s+1) R_{\ell+1} f^s = T_{\ell+1} f^{s+1}$ avec :

$$\rho(T_{\ell+1}) \geqslant \rho(R_{\ell+1}) - 1 > \rho_{\ell+1} - 1,\ d(T_{\ell+1}) \leqslant d(R_{\ell+1}) + 1.$$

D'où $(s+\rho_{\ell+1}-\chi) S_\ell f^{s+1} = (s+\rho_{\ell+1}-\chi)(s+1) H_\ell = (s+1) H_{\ell+1} + T_{\ell+1} f^{s+1}$

Ainsi $S_{\ell+1} = (s+\rho_{\ell+1}-\chi) S_\ell - T_{\ell+1}$ fait l'affaire.

3.3 **Remarque** : S_ℓ est pour $\ell = 0,\dots,L$ un bon opérateur au sens qu'il s'écrit :

$$S_\ell = s^{\ell+1} + S_{\ell,1} s^\ell + \dots + S_{\ell,\ell+1} \text{ avec } S_{\ell,k} \in \mathcal{D} \text{ et } d(S_{\ell,k}) \leqslant k \text{ pour } k=1,\dots,\ell+1.$$

En particulier S_L est un bon opérateur appartenant à l'anulateur de f^{s+1}. L'existence d'un tel opérateur pour f quelconque est établie par Kashiwara dans [K].

3.4 **Définition de Z** : Pour $P = \Sigma D^I p_I \in \mathcal{D}$ nous notons $c(P) = p_{(0,\dots,0)}$ son terme constant à droite, et pour $\rho \leqslant \rho(P)$ nous posons :

$$\operatorname{In}_\rho(c(P)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho < \rho(c(P)) \\ \operatorname{In}(c(P)) & \text{si } \rho = \rho(c(P)) \end{cases}$$

Ainsi : $\operatorname{In}_{\rho(P)}(c(P)) = c(\operatorname{In}(P))$.

Considérons l'espace vectoriel gradué $\mathcal{M} = \bigoplus_{i=0}^{n-2} E\xi_i$.

Nous définissons un sous-espace Z de $\mathcal{M}$ et son gradué associé $\bigoplus_\rho Z_\rho$ de la façon suivante :

$$Z = \{c(B) / B \in \bigoplus \mathcal{D} E.\xi_i,\ \tilde{b}_B = 1\}$$

$$Z_\rho = \operatorname{In}_\rho Z = \{\operatorname{In}_\rho U / U \in Z, \rho(U) = \rho\}$$

<u>Remarques</u> : 1) Z et $\mathrm{In}\, Z = \oplus Z_\rho$ ont la même dimension.

2) La relation $\tilde{b}_B=1$, est pour tout $B \in \mathcal{O}[s,\frac{1}{f}]\, f^s$ équivalente à :

$$B \in \sum_{\ell=0}^{L-1} \mathcal{D} H_\ell + \mathcal{D}\, J(f)\, f^s .$$

En effet $\tilde{b}_B=1$ équivaut à l'existence de $P \in \mathcal{D}[s]$ tel que : $(s+1)B = P f^{s+1}$.

Considérons la division de P par les polynomes, unitaires en s, $S_L,\dots,S_o$:

$$P = C_L S_L + \sum_{\ell=0}^{L-1} C_\ell S_\ell + D ,\ C_L \in \mathcal{D}[s] ,\ (C_o,\dots,C_{L-1}, D) \in \mathcal{D}^{L+1}$$

d'où $(s+1)B = \Sigma(s+1)\, C_\ell H_\ell + D\,.\, f^{s+1}$.

En substituant -1 à s on trouve $D.1=0$, donc $D = \sum_{i=1}^{n} D_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

$$B = \Sigma\, C_\ell\, H_\ell + \Sigma\, D_i \frac{\partial f}{\partial x_i} f^s , C_\ell , D_i \in \mathcal{D}$$

La réciproque est immédiate.

3) On tire de ce calcul la conséquence suivante :

$$Z_\rho \neq 0 \Rightarrow \rho \geqslant \rho(h) \text{ et } \exists\, i \in \{0,\dots,n-2\}\ \rho+i \in \Pi .$$

En effet $\quad c(B) \equiv c(\Sigma\, C_\ell H_\ell) \qquad (\mathrm{mod}\ \mathcal{D}\, J(f)\, f^s)$

$\qquad\qquad = c(\Sigma\, a_\ell H_\ell)$

où $\quad c(C_\ell) = a_\ell$

Donc $\rho(c(B)) \geqslant \inf(\rho(a_\ell) + \rho_{\ell+1}) \geqslant \rho_1$.

4) Pour décrire Z_ρ il suffit de prendre $a_\ell \in \bigoplus_{\rho'=o}^{\rho-\rho_{\ell+1}} O_{\rho'}$:

On dispose ainsi d'un algorithme pour calculer Z_ρ en utilisant les algorithmes contenus dans les propositions 3.2 et 2.2.

3.5 **Lemme** : autre définition de Z_ρ :

$$Z_\rho = \{\mathrm{In}_\rho\, c(B) / \ \tilde{b}_B=1 ,\ \rho(B)=\rho ,\ B \in \bigoplus_{i=0}^{n-2} \mathbb{D}\, E\, \xi_i\} .$$

<u>Preuve</u> : Si $\tilde{b}_B=1$, $\rho(c(B))=\rho$, on a a priori $\rho(B) \leqslant \rho$.

Si $\rho(B) < \rho$, on écrit d'après le lemme 3.1

$(s+\rho(B)-\chi)B = B'+Rf^s$ avec :

$$B' \in \bigoplus_{i=0}^{n-2} \mathbb{D} E \xi_i \ , R \in \mathcal{D} J(f) \text{ et } \rho(B') > \rho(B)$$

On a $\mathrm{In}_\rho\, c(B') = (\rho(B)-\rho)\, \mathrm{In}(B)$, donc on peut remplacer B par

$$\frac{1}{\rho(B)-\rho} B'$$

On se ramène ainsi au cas ou $\rho(B) = \rho(c(B))$.

3.6 Définition de Z' : Considérons $\mathcal{N} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} E \xi_i$ et l'application linéaire $\eta : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ déduite du décalage $s \to s-1$: $\eta(u\xi_i) = u\xi_{i+1}$.

On définit $Z' = \{c(B) \,;\, B = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{D} E \xi_i , B \in \mathcal{D}[s] f^s\}$.

Lemme : i) $Z_\rho = \mathrm{In}_\rho(Z') = E_\rho f^s \oplus \eta(Z_\rho)$

$Z' = E f^s \oplus \eta(Z)$

ii) $Z \subset Z'$.

En effet soient $B = \sum_{i=0}^{n-1} B_i \xi_i$, où $B_i \in \mathbb{D} E$ et $B' = \sum_{i=0}^{n-2} B_{i+1} \xi_i$. Le lemme résulte immédiatement de :

$$\tilde{b}_{B'} = 1 \Leftrightarrow c_B = 1 \ .$$

Pour démontrer cette dernière équivalence, remarquons que $C_B = 1$ équivaut à

$$B_1 s f^{s-1} + \ldots + B_{n-1} s(s-1)\ldots(s-n+2) f^{s-n+1} \in \mathcal{D}[s] f^s$$

d'où par décalage $s \to s+1$:

$$(s+1) \sum_{i=0}^{n-2} B_i \xi_{i+1} \in \mathcal{D}[s] f^{s+1} \text{, c'est-à-dire } \tilde{b}_{B'} = 1 \ .$$

L'inclusion $Z' \subset Z$ est une conséquence de la définition de Z, de i), et du fait que c_B divise $\tilde{b}_B$.

3.7 Lemme : lien entre Z , Z' et les racines des b-fonctions.

a) Soit $U \in \bigoplus_{i=0}^{n-2} E . \xi_i$ de poids $\rho(U) \geq \rho$.

Alors : $\tilde{b}_U(-|\alpha|-\rho) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{In}_\rho\, U \in Z_\rho$.

b) Soit $U \in \bigoplus_{i=0}^{n-1} E.\xi_i$ de poids $\rho(U) \geq \rho$.

Alors : $c_U(-|\alpha|-\rho) \neq 0 \Leftrightarrow In_\rho U \in Z'_\rho$.

<u>Preuve</u> :

- a) Supposons d'abord $In_\rho U \in Z_\rho$. D'après le lemme 3.5, il existe B tel que :
  $\tilde{b}_B = 1$, $\rho(U-c(B)) > \rho$, donc
  $u = B+V$ avec $V \in \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{D}\, E_{>\rho+i}\, \xi_i$.

D'après la proposition 2.6 $(s+|\alpha|+\rho)$ ne divise pas $\tilde{b}_V$, donc ne divise pas $\tilde{b}_U$, car $\tilde{b}_U$ divise $\tilde{b}_V$ puisque :

$$(s+1)\ \tilde{b}_V(s)\ U = \tilde{b}_V(s)\,.(s+1)\ B + (s+1)\ \tilde{b}_V\ V \in \mathcal{D}[s]\, f^{s+1}\ .$$

Inversement supposons que $k = \tilde{b}_U(-|\alpha|-\rho) \neq 0$. Les lemmes 2.4 puis 2.2 donnent :

$$\tilde{b}_U\ U = k\ U + W + R\, f^s$$

avec $W \in \Sigma\, \mathbb{D}\, E_{>\rho+i}\, \xi_i$, $R \in \mathcal{D}\, J(f)$.

On a donc :

$$k\ In_\rho\ U = In_\rho\ (k\ U + W)\ ,$$

d'où $In_\rho\ U \in Z_\rho$ car $(s+1)(k\ U + W) = (s+1)(\tilde{b}_U\ U - R\, f^s) \in \mathcal{D}[s]\, f^{s+1}$.

- b) Soit $U = u_0 f^s + U_1$; $U_1 = \eta(V) = \sum_{i=1}^{n-1} u_i\, \xi_i$.

Par la substitution de $s+1$ à s il est clair que :

$$e(s)\ U_1 \in \mathcal{D}[s]\, f^s \Leftrightarrow (s+1)\, e(s+1)\ V \in \mathcal{D}[s]\, f^{s+1}\ .$$

Comme $C_U = C_{U_1}$ on en tire $\tilde{b}_V(s) = C_U(s+1)$.

Comme $In_\rho(U) \in Z'_\rho$ équivaut à $In_{\rho+1}(V) \in Z_{\rho+1}$ l'assertion b) est une conséquence de a).

<u>Remarque</u> : On retrouve l'inclusion $Z_\rho \subset Z'_\rho$ en utilisant le lemme 3.7 et le fait que C_U divise $\tilde{b}_U$.

§4 - Le calcul du polynome de Bernstein

4.1 Lemme : Soit $U = U' + U'' \in \mathcal{D}\,\mathcal{O}_{\rho+i}\,.\,\xi_i$ avec $U' \in \mathbb{D}\,O_{\rho+i}\,\xi_i$ et $U'' \in \mathbb{D}\,\mathcal{O}'_{\rho+i}\,.\,\xi_i$.
Soit D^{I_0} un élément de $\mathbb{D}$ de degré maximum ($|I_0| = \deg U'$), intervenant dans U' :

$$U' = D^{I_0} V + \sum_{\substack{|I| \leqslant |I_0| \\ I \neq I_0}} D^I W_I \ , \ V\, W_I \in O_{\rho+i}\,\xi_i$$

Alors : $(-1)^{|I_0|}\, x^{I_0}/_{I_0!}\, U = V + R$, avec $R \in \mathcal{D}\ \mathcal{O}'_{\rho+i}\ .\,\xi_i$.

<u>Preuve</u> : Il s'agit de recalculer $x^{I_0} D^I$ dans l'écriture à droite :

Si $|I| \leqslant |I_0|$ et $I \neq I_0$, $x^{I_0} D^I \equiv 0$ $\qquad$ (mod $\mathcal{D}\,\mathfrak{m}$)
et $\qquad x^{I_0} D^{I_0} \equiv (-1)^{I_0}\, I_0!$ $\qquad$. $\qquad$ (mod $\mathcal{D}\,\mathfrak{m}$)

où $\mathfrak{m} = \mathcal{O}'_0$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}$.

4.2 Proposition : formule implicite pour $\tilde{b}$

On a : $\tilde{b}(s) = [\Pi(s+|\alpha|+\rho)]_{red}$, le produit étant étendu à l'ensemble :

$$\mathcal{P} = \{\rho / \exists U \in \mathcal{N}_\rho = \bigoplus_{i=0}^{n-1} E_{\rho+i}\,\xi_i\ ,\ \tilde{b}_U(-|\alpha|-\rho) = 0\ , C_U(-|\alpha|-\rho) \neq 0\ \}.$$

Soit $p(s) = [\prod_{\rho \in \mathcal{P}} (s+|\alpha|+\rho)]_{red}$ le prétendant à être $\tilde{b}(s)$.

- Montrons d'abord que $\tilde{b}(s)$ est un multiple de $p(s)$:
Soit donc $(s+|\alpha|+\rho)$ un facteur de $p(s)$ associé à $U \in \mathcal{N}_\rho$ et $P \in \mathcal{D}[s], Q \in \mathcal{D}[s]$ tel que

$$P f^{s+1} = (s+1)\, \tilde{b}(s)\, f^s$$
$$Q\, f^s \ = c_U\, U\,.$$

Alors $Q\,P\,f^{s+1} = (s+1)\, c_U\, \tilde{b}(s)\, f^s$ ce qui montre que $\tilde{b}_U$, donc $(s+|\alpha|+\rho)$ divise $C_U\ \tilde{b}(s)$.

Comme $s+|\alpha|+\rho$ ne divise pas C_U on a bien $\tilde{b}(-|\alpha|-\rho) = 0$.

- Passons à la réciproque. On note p_ρ le diviseur de p suivant :

$$p_\rho(s) = [\prod_{\rho' \in \mathcal{P}, \rho' < \rho} (s+|\alpha|+\rho')]_{red}$$

Nous montrons par récurrence croissante sur ρ l'assertion

(A) $\qquad (s+1)\, p_\rho(s)\, f^s \in (s+1)(\Sigma\ \mathcal{D}\ \mathcal{O}_{\rho+i}\,.\,\xi_i) + \mathcal{D}[s]\, f^{s+1}$.

Pour $\rho > \sigma$, on en déduit étant donné qu'alors $p_\rho = p$ et que d'après le lemme 2.2 $\mathcal{D}\ \mathcal{O}_{>\sigma+i}\,\xi_i \subset \mathcal{D}\,J(f)\, f^s$ le résultat cherché : $(s+1)\, p(s)\, f^s \in \mathcal{D}[s]\, f^{s+1}$, soit : $\tilde{b}$ divise p.

Le point de départ de (A) est évident : $p_0 = 1$. Admettons donc l'assertion (A) pour ρ :

(1) $$(s+1)\,p_\rho(s)\,f^s = (s+1)(U'+U'') + R(s)\,f^{s+1}\ \text{, avec}$$
$$U' \in \mathbb{D}\,\mathcal{N}_\rho\ ,\ U'' = \mathbb{D}\,\mathcal{N}_{>\rho}\ ,\ R(s) \in \mathcal{D}[s].$$

Comme dans le lemme 4.1 écrivons $U' = D^{I_0}V + W$.

1er cas : $\tilde{b}_V(-|\alpha|-\rho) = 0$

Par le lemme 4.1 : $(-1)^{|I_0|}x^{I_0}/_{I_0!}\,p_\rho(s)\,f^s = V+S+R_1(s)\,f^s$ avec : $S \in \Sigma\,\mathcal{D}\,\mathcal{O}'_{\rho+i}\cdot\xi_i$.

Comme $c_V = c_S$ divise $\tilde{b}_S$, cela montre en utilisant la proposition 2.6 : $\tilde{c}_V(-|\alpha|-\rho) \neq 0$. Ainsi on a $\rho \in \mathcal{P}$ et $p_\rho(s)(s+|\alpha|+\rho) = p_{\rho_1}$, $\rho_1 > \rho$.

Or par le lemme 2.4, il existe $\rho_2 > \rho$ tel que :
$(s+1)(s+|\alpha|+\rho)p_\rho\,f^s \in (s+1)\,\mathcal{D}\,\mathcal{O}_{\rho_2+i}\,\xi_i + \mathcal{D}[s]\,f^{s+1}$.

Ainsi l'assertion (A) est vraie pour $\rho' = \inf(\rho_1,\rho_2) > \rho$.

2ème cas : $\tilde{b}_V(-|\alpha|-\rho) \neq 0$

Comme $\tilde{b}_V\,V \in \mathcal{D}\,J(f)\,f^s + \mathcal{D}[s]\,f^{s+1}$ le lemme 2.4 donne :

$$V \in \Sigma\,\mathcal{D}\,\mathcal{O}'_{\rho+i}\cdot\xi_i + \mathcal{D}\,J(f)\,f^s + \mathcal{D}[s]\,f^{s+1}$$

d'où on tire en reportant dans (1) :

$$(s+1)\,p_\rho\,f^s \in (s+1)(W + \Sigma\,\mathcal{D}\,\mathcal{O}'_{\rho+i}\cdot\xi_i) + \mathcal{D}[s]\,f^{s+1}.$$

Ainsi on a éliminé $D^{I_0}V$ dans U'. On peut donc ainsi soit se ramener au premier cas soit éliminer U'. Dans le second cas $p(-|\alpha|-\rho) \neq 0$ et on a donc complètement démontré l'assertion A pour un $\rho' > \rho$, donc pour tout ρ (puisque ρ et ρ' sont dans l'ensemble $\rho(\mathcal{O}) \subset \mathrm{pgdc}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\mathbb{N}$).

4.3 **Théorème** : $\tilde{b}(s) = [\prod(s)+|\alpha|+\rho]_{red}$, le produit étant étendu à l'ensemble des ρ tels que

$$Z_\rho \subsetneqq Z'_\rho\ .$$

Il s'agit de voir que $\mathcal{P} = \{\rho / Z_\rho \neq Z'_\rho\}$, ce qui est une conséquence du lemme 3.7.

On dispose donc d'après la remarque 3.4.4 d'un algorithme explicite pour calculer $\tilde{b}(s)$, donc aussi d'après la preuve de 4.2 pour calculer un opérateur P(s) tel que $P(s)\,f^{s+1} = b(s)f^s$.

Rappelons que $Z_\rho \subset Z'_\rho \subset \mathcal{N} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} E_{>i}\cdot\xi_i$ et notons $\Pi_i : \mathcal{N} \to E_{>i}\cdot\xi_i$ la projection sur le $i^{\text{ème}}$ facteur.

On a : $\Pi_i(Z_\rho) \subset (E_{\rho+i} \cap E_{>(i+1)\rho(h)})\,\xi_i$ et en particulier $\Pi_{n-1}(Z_\rho) = 0$.

4.4 **Corollaire :** Etant donné u quasi-homogène non nul, soit $\varepsilon(u)$ le plus grand des entiers j tels que :

$$u\,\xi_j \in \Pi_j[(Z'_\rho - Z_\rho) \cap \bigoplus_{i=0}^{j} E\,\xi_i],\ \rho = \rho(u) - j.$$

Alors $0 \leqslant \varepsilon(u) \leqslant \left[\frac{\rho(u)}{\rho(h)}\right]$ pour tout $u \in E$ et l'ensemble des racines de $\tilde{b}$ est l'ensemble des $-|\alpha|-\rho(u)+\varepsilon(u)$.

Preuve : La condition $j \leqslant \varepsilon(u)$ équivaut à l'existence de $(u_0,\dots,u_{j-1})$ de poids convenables tels que :

$$u_0 f^s + \dots + u_{j-1}\xi_{j-1} + u\xi_j \notin Z_\rho$$
$$u_0 f^s + \dots + u_{j-1}\xi_{j-2} + u\xi_{j-1} \in Z_{\rho+1} \qquad \rho = \rho(u)-j.$$

Ainsi $\varepsilon(u)-1$ est le plus grand des entiers k tels que :

$$\exists\, u_i \in E_{\rho(u)-k+i}\ ,\ i=0,\dots,k-1 \qquad k \leqslant \varepsilon(u)$$
$$u_0\xi_0 + \dots + u_{k-1}\xi_{k-1} + u\xi_k \in Z_{\rho(u)-k}.$$

Pour $k=-1$, cette condition est vide, et pour $k=n-1$, n'est jamais satisfaite (car $\Pi_{n-1}(Z_\rho)=0$), donc : $0 \leqslant \varepsilon(u) < n$.

De plus $u\xi_{\varepsilon(u)-1} \in \Pi_{\varepsilon(u)-1} Z_{\rho(u)-\varepsilon(u)+1}$ implique

$$\rho(u) \geqslant \varepsilon(u)\rho(h) \quad \text{donc} \quad \varepsilon(u) \leqslant \left[\frac{\rho(u)}{\rho(h)}\right].$$

Il est clair d'après le théorème et la définition de $\varepsilon(u)$ que $(s+|\alpha|+\rho(u)-\varepsilon(u))$ divise $\tilde{b}(s)$.
Réciproquement si $\tilde{b}(-|\alpha|-\rho)=0$ il existe

$$U = u_0 f^s + u_1\xi_1 + \dots + u_{n-1}\xi_{n-1} \in Z'_\rho - Z_\rho.$$

Soit $j(U)$ l'indice j maximum tel que $u_j \neq 0$ et $U \in Z'_\rho - Z_\rho$ tel que $j(U)$ soit minimum, alors il est clair que $u = u_{j(U)}$ satisfait à $\varepsilon(u) = j(U)$, et donc $\rho = \rho(u\xi_{\varepsilon(u)}) = \rho(u) - \varepsilon(u)$.

4.5 **Remarques : 1)** On retrouve bien le fait que $-|\alpha|$ est la plus grande racine de $\tilde{b}$.

2) Soit $L_{\rho,\varepsilon} = \{u \in E_\rho / u.\xi_\varepsilon \in \Pi_\varepsilon(Z'_{\rho-\varepsilon} \cap \bigoplus_{i=0}^{\varepsilon} E\xi_i)\}$

On obtient ainsi une filtration de E_ρ :

$$E_\rho = L_{\rho,0} \supset \dots \supset L_{\rho,n-1} \supset L_{\rho,n} = 0$$

telle que : $\varepsilon(u) \Leftrightarrow u \in L_\varepsilon - L_{\varepsilon+1}$.
Ainsi le nombre des $\rho - \varepsilon(u)$, où $\rho(u) = \rho$ est égal au cardinal de $\{\varepsilon / \dim L_{\rho,\varepsilon}/L_{\rho,\varepsilon+1} \neq 0\}$, et le degré de $\tilde{b}$ est au plus égal à $\sum_{\rho \in \Pi} \dim E_\rho \leqslant \mu$.

§5 - Polynomes de Bernstein génériques en dimension 2

Commençons par dire quelque chose en dimension n quelconque :
Soit f_1 un polynome quasi-homogène à singularité isolée, $\mathcal{E}$ une base de E constituée de monômes et $F = f_1 + \sum_{\substack{e \in \mathcal{E} \\ \rho(e)>1}} t_e\, e \in \mathbb{C}[t,x]$ la déformation semi quasi-homogène standard qui d'après $[V_2]$ est la déformation semi-universelle à μ-constant de f_1.

On peut recopier tout ce qui a été dit aux paragraphes précédents en travaillant sur $\mathbb{C}(t)$ au lieu de $\mathbb{C}$. On construit une suite (H_ℓ, S_ℓ) universelle puis le polynome de Bernstein de F :

$$P \,.\, F^{s+1} = \varphi(t)\, B(s)\, F^s \quad \text{où } \varphi(t) \in \mathbb{C}(t) \text{ est non nul, et où } P \in \mathcal{D}[s] \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{C}(t).$$

Proposition 5.0 : Il existe un ouvert de Zariski Ω de l'espace des paramètres tel que si $t \in \Omega$, $b_{F_t} = B$.

Preuve : Lorsqu'on spécialise $t = \underline{t}$ au voisinage de 0, pour $\underline{t}$ appartenant à un ouvert de Zariski les $H_\ell(\underline{t})$ sont les spécialisations des H_ℓ et on montre facilement que les dimensions de $Z(\underline{t})$ puis de $Z_\rho(\underline{t})$ sont génériquement égales aux dimensions de Z et de Z_ρ sur $\mathbb{C}(t)$.

Pour déterminer la b-fonction d'un semi quasi-homogène générique en fonctions des poids, il nous faut commencer par calculer les poids des $c(H_\ell)$. En dimension $\geqslant 3$, la recherche d'une formule simple semble assez ardue. Dans le cas où $f_1 = x_1^{a_1} + \ldots + x_n^{a_n}$, avec $a_1, \ldots, a_n$ deux à deux premiers entre-eux on pouvait espérer la formule séduisante :

$$\tilde{b}(s) = \Big(\prod_{\ell=0}^{n-1} \prod_{\substack{\rho\in\Pi \\ \ell\rho(h) \leqslant \rho < (\ell+1)\rho(h)}} (s+|\alpha|+\rho-\ell)\Big)_{red} \qquad \text{valable pour } n = 2\,.$$

L'exemple suivant montre qu'elle est fausse pour n=3 :

5.1 **Exemple** :

$$f_1 = x_1^{10} + x_2^{21} + x_3^{23}\,, \quad \alpha = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{21}, \frac{1}{23}\right).$$

$$\rho(x_1^6 x_2^{13} x_3^{18}) = 2 + \frac{8}{\omega}\,, \quad \omega = 10 \times 21 \times 23 = 4830\,.$$

Or on montre que $(s+|\alpha| + \frac{8}{\omega})$ ne divise pas $\tilde{b}(s)$. Pour cela il suffit de constater que la suite des poids appartenant à Π et strictement supérieurs à 1 commence par

$$1 + \frac{3}{\omega}, 1 + \frac{6}{\omega}, 1 + \frac{9}{\omega}, 1 + \frac{10}{\omega}, \ldots$$

Le début de l'algorithme de la b-fonction montre alors que $(s+|\alpha|+\frac{6}{\omega})(s+|\alpha|+\frac{3}{\omega})(s+|\alpha|)f^s$ ne comporte dans sa réécriture que des termes à droite de poids au moins égal à $\frac{9}{\omega}$.

Dorénavant dans ce paragraphe nous nous plaçons en dimension deux avec les notations suivantes:

$$\rho(x) = \alpha = \frac{p}{r} \qquad \rho(y) = \beta = \frac{q}{r} \qquad (p,q) = 1$$

(α et β sont de cette forme car : $\exists\, (i,j) \in \mathbb{N}^2 \;\; i\,\alpha + j\,\beta = 1$)

$1 < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_L = \sigma$ suite strictement croissante des éléments de $\Pi \cap\,]1, \sigma]$.

5.2 **Définition :**

$$\delta(\sigma_j) = \dim_{\mathbb{C}} E_{\sigma_j} - \sum_{i=1}^{j} \dim_{\mathbb{C}} E_{\sigma_j - \sigma_i}.$$

Soit $d_\rho = \dim_{\mathbb{C}} E_\rho$. Les nombres d_ρ satisfont à la relation suivante d'après [M.O.] :

$$d_\rho = d_{\sigma-\rho}.$$

Lemme : **i)** Pour tout couple ρ, ρ' d'éléments de $\rho(\mathcal{O})$ tels que $1 < \rho < \rho'$ on a $d_\rho \geqslant d_{\rho'} - 1$

ii) $\delta_{\sigma_j} > 0 \Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,j\}\ \sigma_i = 1 + i/r$ et $\delta(\sigma_1) \geqslant 0$.

Preuve : **i)** Comme d_ρ ne dépend que de ρ et des poids α et β il suffit de se placer dans l'un des cas suivants : $f_1 = x^a + y^b$, $x^a + xy^b$ ou $x^a y + xy^b$.

On peut alors prendre pour base $\mathcal{E}$ de E l'ensemble des monomes $x^p y^q$ tels que :

$(p,q) \in [0,a-2] \times [0,b-2]$	pour $x^a + y^b$
$[0,a-1] \times [0,b-2] \cup \{(0,b-1)\}$	pour $x^a + xy^b$
$[0,a-1] \times [0,b-1]$	pour $x^a y + xy^b$.

On constate facilement que $x^p y^q \in E_\rho$ équivaut à une condition du type $(p,q) \in I_\rho$ où I_ρ est un segment de longueur ℓ_ρ et $\ell_\rho \leqslant \ell_{\rho'}$ si $1 < \rho < \rho' \leqslant \sigma$.

Le résultat i) s'en déduit facilement.

ii) Remarquons que $\delta(\sigma_j) \leqslant d_{\sigma_j} - d_0 = d_{\sigma_j} - 1$.

Donc $\delta(\sigma_j) > 0$ implique $d_{\sigma_j} \geqslant 2$, donc $d_\rho \geqslant 1$ quel que soit $\rho \in \rho(\mathcal{O}) \cap\,]1,\sigma_j[$.

On en déduit $\sigma_i = 1 + i/r$ pour $i = 1,\dots,j$ car pour tout entier $i : 1 + i/r \in \rho(\mathcal{O})$.

D'autre part on a $\delta_{\sigma_i} = \dim E_{\sigma_i} - \sum_{\rho < \sigma_i - 1} d_\rho$, car avec la base $\mathcal{E}$ choisie ci-dessus $u \in \mathcal{E}_{\sigma_j}$ et $v \in \mathcal{E}_\rho$ avec $\rho < \sigma_{i-1}$ implique $u/v \in \mathcal{E}_{\sigma_i - \rho}$, donc si $\rho < \sigma_j$ et $d_\rho \neq 0$, $\sigma_j - \rho \in \{\sigma_1,\dots,\sigma_j\}$. D'où pour $i \in \{1,\dots,j\}$:

$$\delta_{\sigma_i} = d_{\sigma_i} - \sum_{\rho < \sigma_i} d_\rho \geqslant d_{\sigma_j} - 1 - \sum_{\rho < \sigma_i - 1} d_\rho \geqslant d_{\sigma_j} - \sum_{\rho < \sigma_j - 1} d_\rho - 1 = \delta_{\sigma_j} - 1 \geqslant 0$$

Nous supposons fixé un polynome quasi-homogène f_1 à singularité isolée ($\rho(f) = 1$ $\rho(x) = \alpha$, $\rho(y) = \beta$), asez général pour qu'on puisse choisir E_ρ et une base monomiale $\mathcal{E} = \bigcup_{\rho \in \Pi} \mathcal{E}_\rho$ de la façon indiquée dans la preuve précédente. Soit $\mathcal{E}_1 = \bigcup_{1 < \rho \leqslant \sigma} \mathcal{E}_\rho$ et $F \in \mathbb{C}[t]\{x,y\}$ la déformation générique telle que $\operatorname{In} F = f$ obtenue en posant : $h = \chi(F) - F = \sum_{e \in \mathcal{E}_1} t_e \cdot e$.

On désigne par $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}[t]\{x,y\}$ le carré de l'idéal $(t_e)_{e \in \mathcal{E}_1}$.

Soient $\Xi_i = \frac{s!}{(s-i)!} F^{s-1}$, $\underline{E} = \mathbb{C}[t]E$. $\underline{\mathfrak{D}} = \mathbb{C}[t]\mathfrak{D}$

On construit comme dans la proposition 3.2 une suite $H_\ell \in \bigoplus_{i=0}^{n-2} \mathbb{D}\underline{E}\,\Xi_i$ et des opérateurs $S_\ell \in \underline{\mathfrak{D}}$ tels que

$$S_\ell\ F^{s+1} = (s+1)\,H_\ell\,.$$

5.3 **Lemme** : Le poids de $H_\ell = H_{\ell,0}F^s$, et le poids de $h_\ell = c(H_\ell)$ sont égaux à $\sigma_{\ell+1}$, et la suite des H_ℓ contient donc L termes. Plus précisément $H_{\ell,0}$ et h_ℓ sont égaux modulo $\mathcal{S}\,.\,\mathfrak{D}$ et on a :

$$h_\ell \equiv \sum_{e\in\mathcal{E}_1} (\sigma_1-\rho(e))\ldots(\sigma_\ell-\rho(e))\,t_e\,e \quad (\text{mod. } \mathcal{S})$$

$$\mathrm{In}\,h_\ell\,F^s = c(\mathrm{In}\,H_\ell) \in Z\,.$$

<u>Preuve</u> : Le point de départ est évident $H_0 = h\,F^s = (s+1-\chi)\,F^s$.
L'algorithme de la proposition 3.2 s'écrit ici :

$$(s+\sigma_{\ell+1}-\chi)H_\ell = H_{\ell+1}\,(\text{mod. } \underline{\mathfrak{D}}J(F)\,F^s)$$

et on trouve :

$$c(H_{\ell+1,0}) = \sigma_{\ell+1}\,h_\ell - \chi(h_\ell) + \frac{\partial\lambda_\ell}{\partial x} + \frac{\partial\mu_\ell}{\partial y}\,(\mathrm{mod}(F'_x\,F'_y))$$

où $\qquad h\,h_\ell = \lambda_\ell\,F'_x + \mu_\ell\,F'_y$.

Comme $\lambda_\ell,\ \mu_\ell \in \mathcal{S}$ le lemme 5.3 en découle par récurrence sur ℓ car :

$$H_{\ell+1} - h_{\ell+1}\,F^s = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\lambda_\ell + \frac{\partial}{\partial y}\mu_\ell\right)F^s + (s+\sigma_{\ell+1}-\chi)(H_\ell - h_\ell\,F^s)$$

et $\qquad \sigma_{\ell+1}\,e - \chi(e) = (\sigma_{\ell+1}-\rho(e))e\,.$

5.4 **Lemme** : L'application linéaire $\varphi_j : \bigoplus_{i=1}^{j} E_{\sigma_j-\sigma_i} \to E_{\sigma_j}$ définie par :

$\mathrm{In}_{\sigma_j}\ c\left(\sum_{i=1}^{j} u_i\,H_{i-1}\right) = \varphi_j(u_1,\ldots,u_j)\,F^s$ modulo $J(F)\,F^s$, détermine une application $\mathbb{C}(t)$-linéaire de rang maximum.

<u>Preuve</u> : Soient u et v des monomes appartenant respectivement à $\mathcal{E}_{\sigma_j}$ et $\mathcal{E}_{\sigma_j-\sigma_i}$.
u/v est alors un élément de $\mathcal{E}_{\sigma_i}$, avec le choix effectué pour $\mathcal{E}$. Le coefficient de $\varphi_j(v)$ sur u est alors égal à $t_{u/v}$ modulo $\mathcal{S}$.

La matrice dans $\mathbb{C}[t]$, modulo $\mathcal{S}$ de l'application linéaire φ_j dans les bases respectives $\mathcal{E}_{\sigma_j}$ et $\bigcup_{\rho<\sigma_j} \mathcal{E}_\rho$ est donc de la forme $(t_{u,v})$ où les $t_{u,v}$ sont des indéterminées, deux à deux distinctes

La matrice dans $\mathbb{C}[t]$, modulo $\mathcal{S}$ de l'application linéaire φ_j dans les bases respectives $\mathcal{E}_{\sigma_j}$ et $\bigcup_{\rho<\sigma_j} \mathcal{E}_\rho$ est donc de la forme $(t_{u,v})$ où les $t_{u,v}$ sont des indéterminées, deux à deux distinctes dans chaque ligne et dans chaque colonne. Il est facile de voir qu'une telle matrice est de rang maximum sur $\mathbb{C}(t)$.

5.5 Théorème : Le polynome de Bernstein d'une singularité semi quasi-homogène générique est, avec les notations précédentes égal à :

$$b(s) = (s+1) \Big[\prod_{\delta(\rho)>0} (s+\alpha+\beta+\rho) \prod_{\substack{\rho\in\Pi \\ \rho>1}} (s+\alpha+\rho-1) \Big]_{red}$$

Preuve : D'après le lemme 5.3 pour tout $\rho \in \Pi$ tel que $\rho>1$ $(\rho=\sigma_j)$ il existe $u = h_{j-1}$ tel que :

$$\rho(u) = \rho \quad , \quad u\, F^s \in Z_\rho \,.$$

- Lorsque $\delta(\rho) \leqslant 0$, d'après le lemme 5.4 : $E_\rho F^s = Z_\rho$ et donc pour tout $u \in E_\rho$ $\varepsilon(u)=1$.
- Lorsque $\delta(\rho) > 0$, on a aussi $\delta(\rho') > 0$ si $1 < \rho' = \sigma_i \leqslant \rho$, et d'après le lemme 5.4 φ_i est injective pour $i=1,\dots,j$, φ_j étant en plus non surjective. Soit $u \in E_\rho - \mathrm{Im}\, \varphi_j$: $u\, F^s$ ne peut pas appartenir à Z_ρ car si $u = \mathrm{In}\, c(\Sigma \lambda_k H_k)$ avec $\lambda_k \in \mathcal{O}$, on a puisque $u \notin \mathrm{Im}\, \varphi_j$:

$$\rho' = \inf \rho(\lambda_k H_k) < \rho$$

$$\text{donc } \mathrm{In}_{\rho'}(\Sigma \lambda_k H_k) = 0$$

ce qui contredit l'injectivité de l'application φ_i correspondant à ρ'. On a donc $u\, F^s \notin Z_\rho$ soit : $\varepsilon(u) = 0$.

- Puisque $d(\rho) = \delta(\rho) > 0$ lorsque $\rho \in \Pi$ et $\rho < 1$ ceci achève la démonstration du théorème.

5.6 Corollaire : Soient a et b deux entiers naturels premiers entre-eux. Le polynome de Bernstein d'une singularité quasi-homogène générique telle que $\mathrm{Inf}=x^a+ y^b$ est égal à :

$$b(s)=(s+1) \prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant a-2 \\ 0\leqslant j\leqslant b-2}} (s+ {}^{i+1}/_a + {}^{j+1}/_b - \varepsilon_{i,j})$$

$$\varepsilon_{i,j}= 0 \qquad \text{pour } {}^i/_a + {}^j/_b < 1$$

$$\varepsilon_{i,j}= 1 \qquad \text{pour } {}^i/_a + {}^j/_b > 1 .$$

§6 - Base du réseau de Brieskorn saturé

Rappelons que suivant B. Malgrange [M_2] on peut munir $\mathcal{O}[s,\frac{1}{f}]f^s$ d'une structure de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}}$-module l'action de la nouvelle variable t, et de $\partial/_{\partial t}$ étant respectivement :

$$t\, g(s)\, f^s = g(s)\, f^{s+1}$$

$$\partial/_{\partial t}\, (g(s)f^s) = -t^{-1}(s+1)\, g(s)f^s = -\frac{s\, g(s-1)}{f} f^s$$

soit encore $s = -\partial/_{\partial t}\,.\,t$.

On note $\mathcal{D}_X = \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}$, $\mathcal{D}_{X,t} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}}$ et

$M = \mathcal{D}_X[s]\, f^s \subset N = \mathcal{D}_{X,t}\, f^s \subset \mathcal{O}[s, \frac{1}{f}] f^s$.

Le complexe de Gauss-Manin de f est $DR(N) = \Omega^{\cdot}_X * \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} L$, et si f est à singularité isolée ce système n'a de la cohomologie qu'en degré 1 et n. On appelle système de Gauss-Manin de f le $\mathcal{D}_t$-module :

$G = H^n(N)$ n^{ie} groupe de cohomologie de DR(N).

Conformément à F.Pham [P] ou à [M_2] on a :

$$N \simeq \mathcal{D}_{X,t}\, \delta(t-f)$$

$$G \simeq \Omega^n \underset{\mathcal{D}}{\otimes} N \simeq \mathcal{D}_{X,t}\, f^s / (\sum_{i=1}^{n} (\partial/_{\partial x_i})\, \mathcal{D}_{X,t}\, f^s)$$

Le réseau de Brieskorn est le sous-espace G_0 de G formé des éléments de la forme $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \otimes a(x)\, f^s$.

Le réseau saturé est :

$$\tilde{G}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} (t(\partial/_{\partial t}))^k\, G_0$$

B. Malgrange montre dans [M_2], que le morphisme naturel

$H^n(M) \simeq \mathcal{D}_X[s] f^s / (\Sigma(\partial/_{\partial x_i})\, \mathcal{D}_X[s] f^s) \longrightarrow G$, est surjectif et d'image $\tilde{G}_0$, et il démontre le résultat suivant :

Théorèmes [M_1][M_2] : Le $\mathbb{C}\{t\}$-module $\tilde{G}_0$ est libre de rang μ, $\partial/_{\partial t}$ est inversible sur G, $\tilde{G}_0$ contient $\partial^{-1}/_{\partial t}\, \tilde{G}_0$, $t\, \tilde{G}_0 = \partial^{-1}/_{\partial t}\, \tilde{G}_0$ et $\tilde{b}(s)$ est égal au polynome minimal de l'action de $(-s)$ sur l'espace vectoriel $\tilde{G}_0 / (\partial^{-1}/_{\partial t})\, \tilde{G}_0$.

Remarquons que l'existence d'un bon opérateur $S_L = s^{L+1} + S_{\ell,1}\, s^L + \ldots + S_{\ell,\ell+1}$ annulant f^s (voir §3) entraîne :

$$\tilde{G}_0 = \sum_{0}^{L} ((t\,\partial/_{\partial t})^{\ell})\, G_0$$

d'où on tire $\dim \tilde{G}_0 / G_0 < \infty$ (propriété de régularité).

6.1 **Lemme :** Soit $U = \Sigma\, u_i\, \xi_i \in \Sigma\, \mathcal{O}\,.\,\xi_i$. On a $(-1)^i \xi_i = ((\partial/_{\partial t})^i)\, f^s$, donc $U \in N$.

On note [U] sa classe dans G (identifiée à $dx \underset{\mathcal{D}}{\otimes} U$) . On a :

$$U \in Z \Leftrightarrow [U] \in \partial^{-1}/_{\partial t}\, \tilde{G}_0 ,$$

$$U \in Z' \Leftrightarrow [U] \in \tilde{G}_0 .$$

Preuve : La première assertion s'obtient aisément par récurrence sur i :

$$(-1)^i \partial/_{\partial t}\, \xi_i = \partial/_{\partial t}(s\ldots(s-i+1)/f^i)\, f^s = s\,\frac{(s-1)\ldots(s-i)}{f^{i+1}}\, f^s = \xi_{i+1}\,.$$

Il suffit de démontrer l'une des deux équivalences car $Z' = E\,f^s + \eta\, Z$ et si $U = U_0\, f^s + \eta(U')$ on a : $[\eta\, U'] = \partial/\partial t\,[U']$, $[U_0\, f^s] \in G_0 \subset \tilde{G}_0$, donc :

$$[U] \in \tilde{G}_0 \Leftrightarrow [\eta\, U'] \in \tilde{G}_0 \Leftrightarrow [U'] \in (\partial/_{\partial t})^{-1}\, \tilde{G}_0\,.$$

Démontrons la deuxième équivalence :

$$[U] \in \tilde{G}_0 \Leftrightarrow \exists\, P \in \mathcal{D}[s]\,,\ [U] = [P(s)\, f^s]$$
$$\Leftrightarrow U - P(s)\, f^s \in \Sigma\, \partial/_{\partial x_i}\, \mathcal{D}_{x,t}\, f^s = \Sigma\, \partial/_{\partial x_i}\, \mathcal{D}\, \xi_j$$
$$\Leftrightarrow c(P(s)\, f^s) = U \text{ , ce qui équivaut à } U \in Z'$$

car en divisant $P(s)$ par les $S_i(s-1)$ on trouve :

$$P(s)\, f^s = (C_L\, S_L(s-1) + \Sigma\, C_\ell\, S_\ell(s-1))\, f^s + D\, f^s \qquad D \in \mathcal{D}$$
$$= \sum_{\ell=0}^{L-1} s\, C_\ell\, H_\ell(s-1) + D\, f^s \in \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{D}\, \xi_i$$

donc $P(s)\, f^s \in \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{D} E\, \xi_i \bigoplus \mathcal{D}\, J(f)$ d'après le lemme 2.2 .

Le calcul précédent peut encore s'écrire :

$$[P(s)\, f^s] = \partial/_{\partial t}[\Sigma\, C_\ell\, H_\ell] + [D\, f^s] = \partial/_{\partial t}[c(\Sigma\, C_\ell\, H_\ell)] + [D\, f^s]$$

et on en déduit deux conséquences :

- L'application $Z'/Z \longrightarrow \tilde{G}_0 \,/(\partial^{-1}/_{\partial t})\, \tilde{G}_0$ définie par le lemme 6.1 est bijective.
- $\tilde{G}_0\, /_{G_0}$ est engendré par $\partial/_{\partial t}\, [H_\ell]$, $\ell = 0,\ldots,L-1$ comme $\mathcal{O}_X$-module.

Reprenons les notations de la remarque 4.5.2. On se donne $\mathcal{U}_{\rho,j} \subset L_{\rho,j} \subset E_\rho$ système libre définissant une base de $L_{\rho,j}/L_{\rho,j+1}$. Pour chaque $u \in \mathcal{U}_{\rho,j}$ on choisit $B_u \in \mathcal{D}[s]\, f^s$ tel que $\mathrm{In}_{\rho+j}\ c(B_u) = u_0\, f^s + \ldots + u_{j-1}\, \xi_{j-1} + u\, \xi_j$ et on note γ_u la classe de $[c(B_u)]$ dans $\tilde{G}_0/(\partial/_{\partial t})^{-1}\, \tilde{G}_0$, $V\rho,j$ l'ensemble des γ_u lorsque u parcourt $\mathcal{U}_{\rho,j}$, et $V = \cup\, V_{\rho,j}$.

6.2 **Proposition :** V est une base de $\tilde{G}_0/(\partial^{-1}/_{\partial t})\, \tilde{G}_0$ qui se relève comme toujours en une base $[c(B_u)]$ de $\tilde{G}_0$.

Preuve : Il est clair que $\mathcal{U} = \cup\, \mathcal{U}_{\rho,j}$ est une base de E. Comme $\mu = \dim E = \dim Z'/Z$, il est suffisant de montrer que $\{c(B_u)/u \in \mathcal{U}\}$ définit une partie libre de Z'/Z .

Raisonnons par l'absurde : Soient $\lambda_u \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que $\sum_{u \in \mathcal{U}} \lambda_u\ c(B_u) \in Z$. On pose alors :

$$\rho = \inf\{\rho(u) + j(u)/\lambda_u \neq 0\}\,,\ j(u) = j \text{ si } u \in \mathcal{U}_{\rho,j}$$
$$j = \max\{j(u)/\rho(u) + j(u) = \rho\ ,\ \lambda_u \neq 0\}$$

On a alors : $\quad \mathrm{In}_\rho(\Sigma\,\lambda_u c(Bu)) = v_0\xi_0 + \ldots + v_j\xi_j \in Z_\rho$ avec

$$v_j = \sum_{\substack{j(u)=j\\ \rho(u)=\rho-j}} \lambda_u u, \quad \text{donc } v_j \in L_{\rho,j+1}$$

Ceci contredit le fait que $\mathcal{U}_{\rho,j}$ définit une base de $L_{\rho,j}/L_{\rho,j+1}$.

On peut également montrer que $\{c(B_u),\ u \in \mathcal{U}\}$ engendrent Z'/Z.

6.3 **Proposition :** La matrice de $\partial/_{\partial t}\, t$ dans la base $\mathcal{V}$ ordonnée convenablement est triangulaire, diagonalisable, la valeur propre correspondant à $\mathcal{V}_{\rho,j}$ étant $|\alpha|+\rho-j$.

Preuve : Soit V_ρ l'espace vectoriel engendré par la réunion des $\mathcal{V}_{\rho',j}$ tels que $\rho'-j'=\rho$.
On pose $W_\rho = \bigoplus_{\rho'\geqslant\rho} V_{\rho'}$ et $W'_\rho = \bigoplus_{\rho'>\rho} V_{\rho'}$.

Il suffit alors de démontrer les assertions suivantes :

1) $\partial/_{\partial t}\, t\,(W_\rho) \subset W_\rho$

2) L'application induite par $\partial/_{\partial t}\, t$ sur $W_\rho/W'_\rho \simeq V_\rho$ est égale à $(|\alpha|+\rho)\mathrm{Id}$,

qui se déduisent à leur tour de l'expression de $\mathrm{In}\, c(B_u)$ et du lemme 1.5 sous la forme suivante :

$$(-\partial/_{\partial t} + |\alpha| + \rho)[u.\xi_j] = [\rho u - \chi(u)+j)\,\xi_j] - [u h \xi_{j+1}], \text{ car } [\partial/_{\partial t}\,.x_j\, U] = 0$$

ou
$$\partial/_{\partial t}\, t\,[u\xi_j] = (|\alpha|+\rho-j)\,[u\xi_j] - [(\rho u - \chi(u)\xi_j] + [u h \xi_{j+1}]$$

et
$$\rho((\rho u - \chi(u))\,\xi_j),\ \rho(u h \xi_{j+1}) > \rho - j \quad \text{si } u \in \mathcal{U}_{\rho,j}$$

Cette proposition permet en utilisant le théorème de Malgrange cité plus haut de vérifier à nouveau le théorème 4.3, sans passer par la preuve de la proposition 4.2.

Bibliographie

[Be] **I.N. Bernstein,** The Analytic Continuation of Generalized Functions with Respect to a Parameter, Fonctional Analysis and its Applications, vol.6, (1972)

[Bj] **J.E. Björk,** Rings of Differential Operators, North-Holland Mathematical Library, (1979)

[Br] **E. Brieskorn,** Die monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen, Man. Math. Z., (1970), pp 103-161

[C.N$_1$] **P. Cassou-Nogues,** Racines de polynomes de Bernstein, Ann. de l'Inst. Fourier, (à paraître)

[C.N$_2$] **P. Cassou-Nogues,** Etude du comportement du Polynome de Bernstein lors d'une déformation à μ constant de x^a+y^b avec $(a,b)=1$, Compositio Mathematica (à paraître)

[C.N$_3$] **P. Cassou-Nogues,** Polynome de Bernstein générique, Preprint

[K] **M. Kashiwara,** B-Functions and Holonomic Systems, Inventiones Mathematicae, (1976)

[K$_1$] **M. Kato,** The b-Function of μ-constant Deformation of x^9+y^4, Bulletin College of Science University of Ryukyus, n°32, (1982)

[K$_2$] **M. Kato,** The b-Function of μ-Constant Deformation of x^7+y^5, Bulletin College of Science University of Ryukyus, n°32, (1981)

[M_1] **B. Malgrange,** Intégrales asymptotiques et Monodromie, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 4ième série, t.7, fax.3, (1974)

[M_2] **B. Malgrange,** Le polynome de Bernstein d'une singularité isolée, Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations, (Colloq. Intern., Nice 1974), Lect. Notes in Math, vol.459, Springer Verlag (1975), 98-119

[M_3] **B. Malgrange,** Polynome de Bernstein-Sato et Cohomologie évanescente, Analyse et Topologie sur les Espaces Singuliers, Coll. Luminy 1981, Astérisque n°101 et 102, Soc. Math. France

[M-O] **O. Milnor** et **P. Orlik,** Isolated Singularities Defined by Weighted Homogeneous Polynomials, Topology 9, (1970)

[P] **F. Pham,** Singularités des Systèmes de Gauss-Manin, Birkhaüser, Progress in Math,2, (1979)

[S] **K. Saito,** Quasihomogene isolierte Singularïten von Hyperflächen, Invent. Math, 14, (1971), 123-142

[Sc] **J. Scherk,** On the Gauss-Manin Connection of an isolated Hypersurface Singularity, Math. Ann. 238, (1978), 23-32

[V_1] **A.N. Varchenko,** Gauss-Manin Connection of Isolated Singular Point and Bernstein Polynomial, Bull. de la Société Mathématique de France, 2ième série, 104 (1980), 205-223

[V_2] **A.N. Varchenko,** A lower Bound for the Codimension of the Stratum μ=cst in Terms of the Mixed Hodge Structure, Vestrik Mostovskogo Univ. Mathematica, vol.37, n°6,(1982)

[Y] **T. Yano,** On the Theory of b-Functions, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. 14, (1978), 111-202.

◇