Qu'est-ce que la modélisation mathématique ?

François Ducrot

http://math.univ-angers.fr/∼ducrot/CSG/

Introduction

La modélisation, c'est l'ensemble du processus qui permet l'intervention des mathématiques dans une science basée sur l'expérience ou l'observation. Voici quelques exemples dans différentes disciplines scientifiques :

Introduction

La modélisation, c'est l'ensemble du processus qui permet l'intervention des mathématiques dans une science basée sur l'expérience ou l'observation. Voici quelques exemples dans différentes disciplines scientifiques :

Physique : On observe que le son émis par la corde d'un instrument de musique varie en fonction de la longueur. On va traduire la physique de la corde en équations grâce aux équations de la mécanique, et en déduire les lois gouvernant la vibration d'une corde.

Introduction

La modélisation, c'est l'ensemble du processus qui permet l'intervention des mathématiques dans une science basée sur l'expérience ou l'observation. Voici quelques exemples dans différentes disciplines scientifiques :

Chimie : On peut décrire le comportement des électrons dans un atome, et comment cela gouverne la façon dont les atomes se regroupent en molécules. Les équations mises en jeu proviennent des lois de la physique quantique.

Introduction

La modélisation, c'est l'ensemble du processus qui permet l'intervention des mathématiques dans une science basée sur l'expérience ou l'observation. Voici quelques exemples dans différentes disciplines scientifiques :

Chimie : De façon plus macroscopique, on peut s'intéresser aux lois qui déterminent la vitesse de réaction dans une réaction chimique.

Introduction

La modélisation, c'est l'ensemble du processus qui permet l'intervention des mathématiques dans une science basée sur l'expérience ou l'observation. Voici quelques exemples dans différentes disciplines scientifiques :

Économie : En fonction des prix des différentes marchandises et du revenu du consommateur, celui-ci effectue un arbitrage entre ses dépenses. Peut-on prévoir son comportement ?

Introduction

La modélisation, c'est l'ensemble du processus qui permet l'intervention des mathématiques dans une science basée sur l'expérience ou l'observation. Voici quelques exemples dans différentes disciplines scientifiques :

Écologie animale : Comment évoluent les effectifs de populations animales sous différentes hypothèses :

- sans contraintes liées au milieu
- avec des contraintes d'approvisionnement en nourriture
- en présence de prédateurs
- avec interaction entre proies et prédateurs

La démarche de modélisation

On peut distinguer plusieurs étapes :

La démarche de modélisation

On peut distinguer plusieurs étapes :

- Le scientifique fait des hypothèses sur les phénomènes étudiés

La démarche de modélisation

On peut distinguer plusieurs étapes :

- Le scientifique fait des hypothèses sur les phénomènes étudiés
- Les hypothèses sont traduites mathématiquement en un modèle

La démarche de modélisation

On peut distinguer plusieurs étapes :

- Le scientifique fait des hypothèses sur les phénomènes étudiés
- Les hypothèses sont traduites mathématiquement en un modèle
- On étudie le modèle mathématique ; on en tire des conséquences qualitatives ou quantitatives et on fait des prévisions.

La démarche de modélisation

On peut distinguer plusieurs étapes :

- Le scientifique fait des hypothèses sur les phénomènes étudiés
- Les hypothèses sont traduites mathématiquement en un modèle
- On étudie le modèle mathématique ; on en tire des conséquences qualitatives ou quantitatives et on fait des prévisions.
- On compare les prévisions aux réalités expérimentales

La démarche de modélisation

On peut distinguer plusieurs étapes :

- Le scientifique fait des hypothèses sur les phénomènes étudiés
- Les hypothèses sont traduites mathématiquement en un modèle
- On étudie le modèle mathématique ; on en tire des conséquences qualitatives ou quantitatives et on fait des prévisions.
- On compare les prévisions aux réalités expérimentales
- On revient éventuellement sur les hypothèses pour modifier le modèle, et le cycle continue...

Les exemples choisis

J'ai choisi d'illustrer la démarche de modélisation par des exemples issus de problèmes de dynamique des populations (écologie animale). Caractéristiques générales :

Les exemples choisis

J'ai choisi d'illustrer la démarche de modélisation par des exemples issus de problèmes de dynamique des populations (écologie animale). Caractéristiques générales :

- les hypothèses sont simples à exprimer

Les exemples choisis

J'ai choisi d'illustrer la démarche de modélisation par des exemples issus de problèmes de dynamique des populations (écologie animale). Caractéristiques générales :

- les hypothèses sont simples à exprimer
- les hypothèses sont bâties sur des observations expérimentales plutôt que sur des considérations idéologiques

Les exemples choisis

J'ai choisi d'illustrer la démarche de modélisation par des exemples issus de problèmes de dynamique des populations (écologie animale). Caractéristiques générales :

- les hypothèses sont simples à exprimer
- les hypothèses sont bâties sur des observations expérimentales plutôt que sur des considérations idéologiques
- les techniques mathématiques sont relativement simples

Les exemples choisis

J'ai choisi d'illustrer la démarche de modélisation par des exemples issus de problèmes de dynamique des populations (écologie animale). Caractéristiques générales :

- les hypothèses sont simples à exprimer
- les hypothèses sont bâties sur des observations expérimentales plutôt que sur des considérations idéologiques
- les techniques mathématiques sont relativement simples
- Tous les modèles étudiés décrivent un système dynamique dépendant du temps

Les exemples choisis

J'ai choisi d'illustrer la démarche de modélisation par des exemples issus de problèmes de dynamique des populations (écologie animale). Caractéristiques générales :

- les hypothèses sont simples à exprimer
- les hypothèses sont bâties sur des observations expérimentales plutôt que sur des considérations idéologiques
- les techniques mathématiques sont relativement simples
- Tous les modèles étudiés décrivent un système dynamique dépendant du temps
- Outil mathématique pricipal : les équations différentielles

Prolifération des lapins en Australie

En 1859, 24 lapins furent introduits en Australie, par un agriculteur émigré d'Angleterre et nostalgique de son pays d'origine. Quelques années plus tard ces petites bêtes pullulaient, et devenaient un fléau national. Pour tenter de le juguler, on a introduit des prédateurs (des renards), une maladie (la myxomatose), et on a construit des milliers de kilomètres de clotures. Tout ceci sans succès.

Prolifération des lapins en Australie

En 1859, 24 lapins furent introduits en Australie, par un agriculteur émigré d'Angleterre et nostalgique de son pays d'origine. Quelques années plus tard ces petites bêtes pullulaient, et devenaient un fléau national. Pour tenter de le juguler, on a introduit des prédateurs (des renards), une maladie (la myxomatose), et on a construit des milliers de kilomètres de clotures. Tout ceci sans succès.
On a ici un exemple de croissance exponentielle qui peut se décrire par le modèle malthusien.

L'hypothèse malthusienne

Hypothèse

Les nombres de naissances et de morts dans une population, pendant une période de courte durée, sont proportionnels

- *à la l'effectif de cette population*
- *à la durée de cette période*

Thomas Malthus, 1766-1834

Traduction mathématique de l'hypothèse malthusienne

Soit $u(t)$ l'effectif de la population à l'instant t. On étudie la variation de u entre les instants t et $t + \Delta t$.

$$u(t + \Delta t) - u(t) = \text{nb de naissances} \quad - \text{nb de morts}$$

et

$$\text{nb de naissances pendant } \Delta t = au(t)\Delta t$$

$$\text{nb de morts pendant } \Delta t = bu(t)\Delta t$$

Loi d'évolution malthusienne

On écrit donc

$$u(t + \Delta t) - u(t) = \alpha u(t) \Delta t$$

avec $\alpha = a - b$

Loi d'évolution malthusienne

On écrit donc

$$u(t+\Delta t) - u(t) = \alpha u(t)\Delta t$$

avec $\alpha = a - b$
Quand Δt est assez petit, $\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t} \simeq u'(t)$, et on peut écrire la

Loi d'évolution (Malthus en temps continu)

$$u'(t) = \alpha u(t)$$

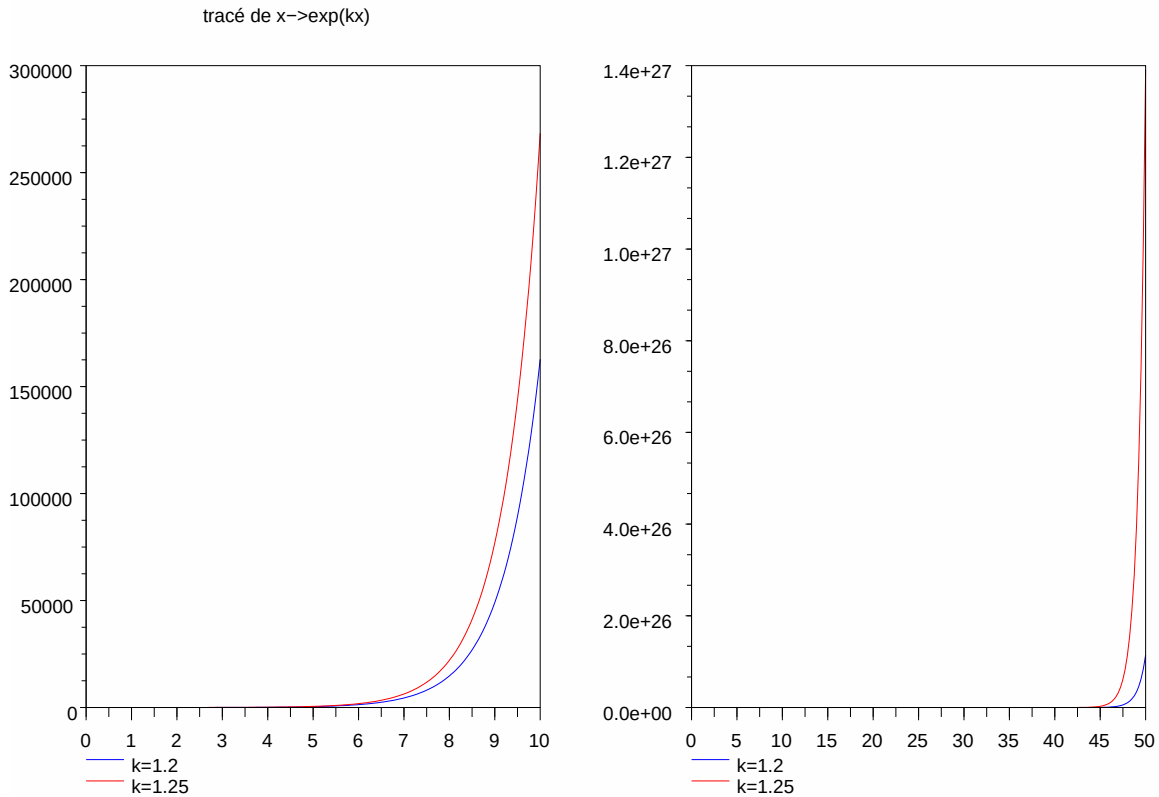
où α est la différence entre le taux instantané de natalité et le taux instantané de mortalité.

Analyse du modèle malthusien

On obtient une équation différentielle du premier ordre, c'est à dire une équation qui exprime la dérivée de u, en fonction de u.
Si on connait la valeur initiale $u(0) = u_0$, on sait alors calculer les valeurs $u(t)$ pour tout $t > 0$:

$$u(t) = u_0 e^{\alpha t}$$

Représentation graphique du modèle de Malthus continu



Discussion du modèle de Malthus

- Croissance exponentielle : c'est bien ce qui a été observé pendant un certain temps.
- Est-ce vraisemblable sur une longue période ?

Discussion du modèle de Malthus

- Croissance exponentielle : c'est bien ce qui a été observé pendant un certain temps.
- Est-ce vraisemblable sur une longue période ?
  Surface de l'Australie : 7 millions de km^2, soit $7\,10^{12} m^2$.
  Effectif de lapins prévu au bout de 50 ans : 10^{27}.
  Cherchez l'erreur !

Discussion du modèle de Malthus

- Croissance exponentielle : c'est bien ce qui a été observé pendant un certain temps.
- Est-ce vraisemblable sur une longue période ?
  Surface de l'Australie : 7 millions de km^2, soit $7\,10^{12} m^2$.
  Effectif de lapins prévu au bout de 50 ans : 10^{27}.
  Cherchez l'erreur !
- On doit tenir compte d'un effet de saturation du milieu.

Prise en compte des contraintes alimentaires

Dans le modèle de Malthus, on asupposé que le taux instantané de renouvellement α est constant, ce qui conduit à une évolution exponentielle.

Hypothèse

Le taux instantané de renouvellement dépend de u :

- *Pour u petit, le taux* $\alpha(u)$ *est proche d'une constante* α_0.
- α *décroît en fonction de u.*
- *Existence d'un seuil S tel que* $\alpha(S) = 0$ *et* $\alpha(u) < 0$ *pour* $u > S$.

Prise en compte des contraintes alimentaires

On peut choisir :

$$\alpha(u) = \alpha_0 \frac{S-u}{S}$$

on obtient alors le

Modèle logistique de Verhulst

$$u'(t) = \alpha_0 \frac{S-u(t)}{S} u(t)$$

Pierre Verhulst, 1804-1849

Remarque sur la modélisation des contraintes alimentaires

On aurait pu choisir une autre modélisation de la fonction $u \mapsto \alpha(u)$, comme par exemple

$$\alpha(u) = \alpha_0 \frac{S^2 - u^2}{S^2}$$

ce qui donnerait

Un autre modèle logistique

$$u'(t) = \alpha_0 \frac{S^2 - u^2(t)}{S^2} u(t)$$

Pourquoi choisir un modèle plutôt que l'autre ?

On va continuer avec le modèle de Verhulst.

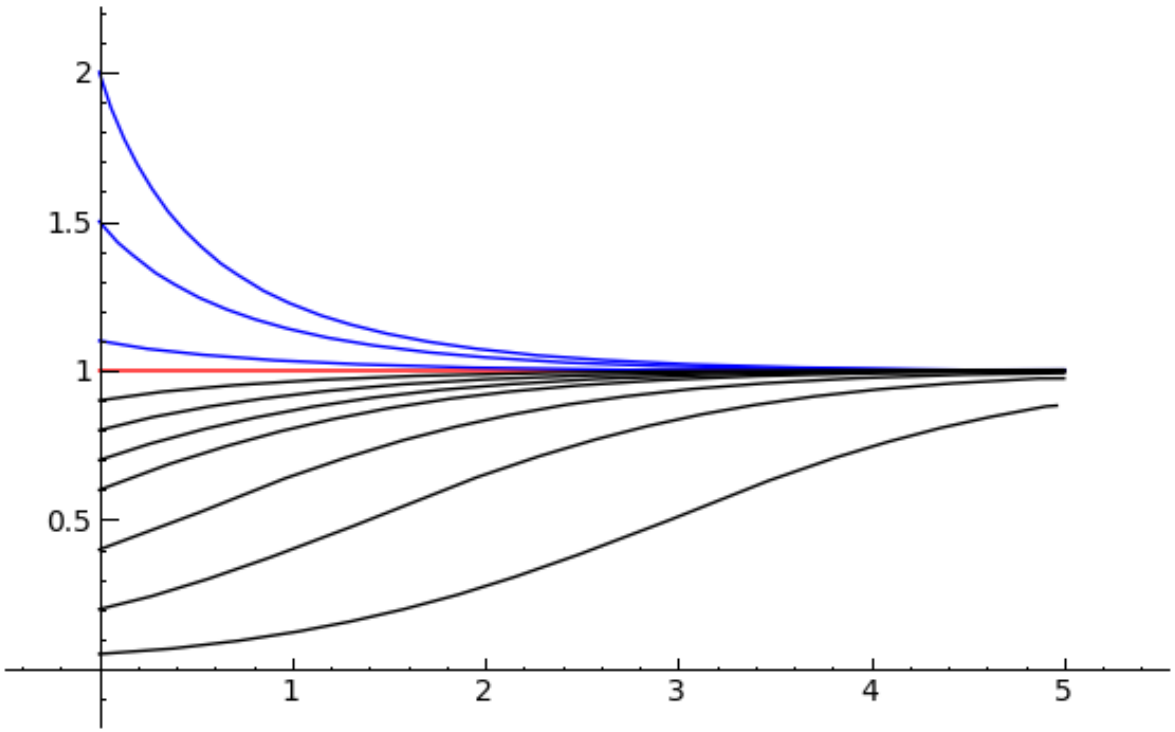
Étude mathématique : résolution de l'équation

On peut montrer que si on fixe la valeur initiale u_0 de u pour $t = 0$, la fonction $t \mapsto u(t)$ est entièrement déterminée.

Expression de la solution

$$u(t) = u_0 \frac{S e^{\alpha_0 t}}{S + u_0(e^{\alpha_0 t} - 1)}$$

Représentation graphique des solutions ($S = \alpha_0 = 1$)

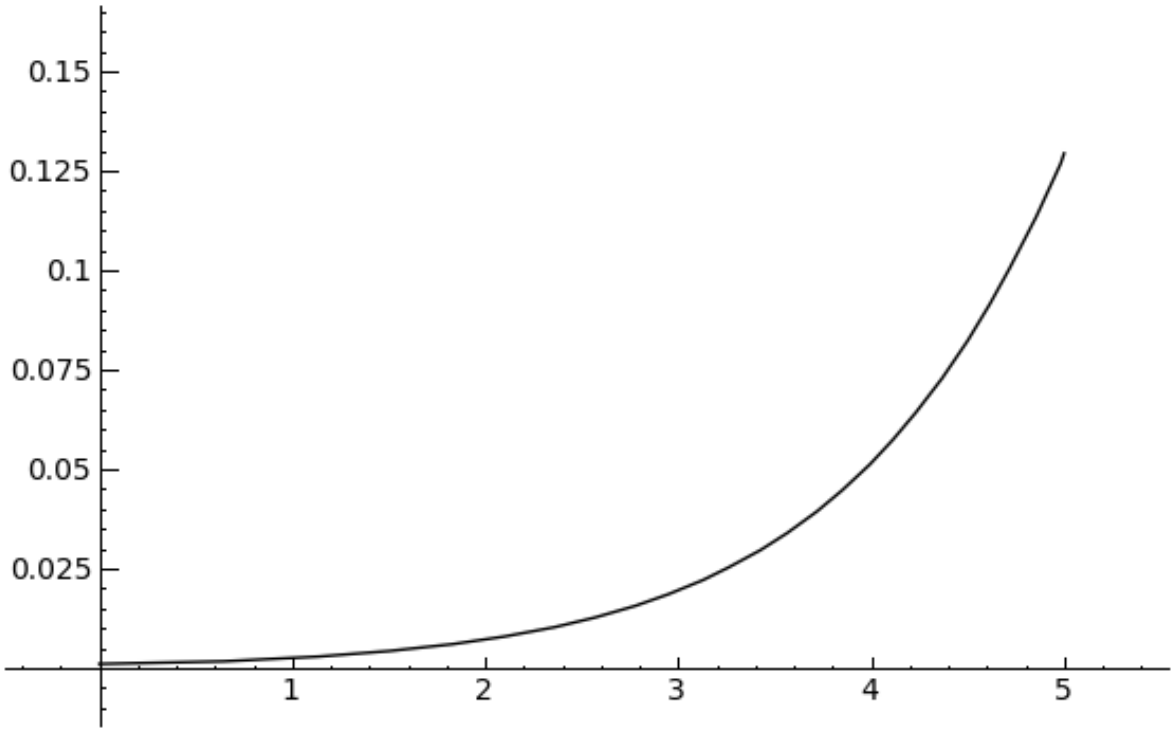


Discussion sur la représentation graphique

Si l'effectif initial est inférieur au seuil, la population croît et se rapproche asymptotiquement du seuil limite.
Si l'effectif initial est supérieur au seuil, la population décroît faute de nourriture et se rapproche asymptotiquement du seuil limite.

Discussion sur la représentation graphique

Si l'effectif initial est très inférieur au seuil, et si on observe l'évolution sur un temps pas trop long, on peut observer une croissance exponentielle, comme dans le modèle de Malthus. Ici $S = 1$ et $u_0 = 0,001$:



La chenille de l'épicéa

La chenille de l'épicéa est un insecte ravageur des sapins de l'Amérique du nord, qui détruit les feuilles de ces arbres. Des travaux ont été effectués à partir de 1978 pour modéliser l'évolution de cette population et éventuellement proposer des politiques de prévention.

Chenille de l'épicéa - Hypothèses de modélisation

Deux limitations au développement des chenilles :

Chenille de l'épicéa - Hypothèses de modélisation

Deux limitations au développement des chenilles :

- Un facteur logistique lié à la quantité de nourriture disponible

Chenille de l'épicéa - Hypothèses de modélisation

Deux limitations au développement des chenilles :

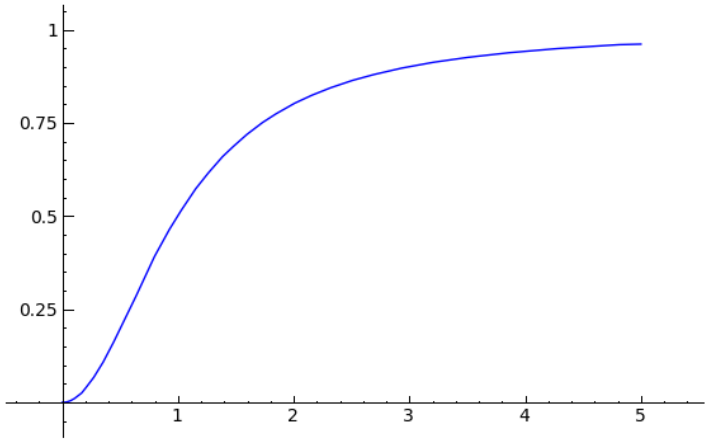
- Un facteur logistique lié à la quantité de nourriture disponible
- Un facteur de prédation : les chenilles sont mangées par les oiseaux. Si N désigne l'effectif de chenilles, le nombre de chenilles mangées par les oiseaux par unité de temps est évalué à

$$P(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2}$$

Le choix de cette formule est en partie arbitraire

Pourquoi ce terme de prédation ?

- $N \mapsto P(N)$ est croissante
- $P(0) = 0$
- Saturation de l'appétit des oiseaux : $\lim_{N \to \infty} P(N) = B$
- Prédateur non spécialisé : S'il y a peu de chenilles, les oiseaux se tournent vers d'autres proies, traduit par $P'(0) = 0$.



Équation différentielle de la chenille de l'épicéa

Équation différentielle

$$N'(t) = \alpha_0 N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{S}\right) - \frac{BN(t)^2}{A^2 + N(t)^2}$$

ou, après changement d'unités :

Équation différentielle normalisée

$$u'(t) = \rho u(t)\left(1 - \frac{u(t)}{\kappa}\right) - \frac{u(t)^2}{1 + u(t)^2}$$

Solutions stationnaires

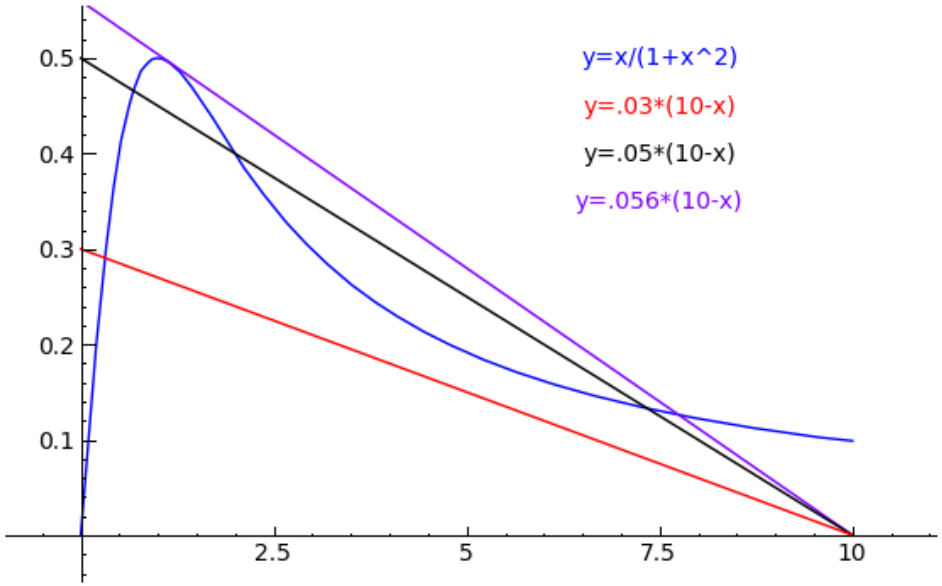
On cherche les solutions constantes. Dans ce cas $u' = 0$ et on a

Recherche des solutions stationnaires

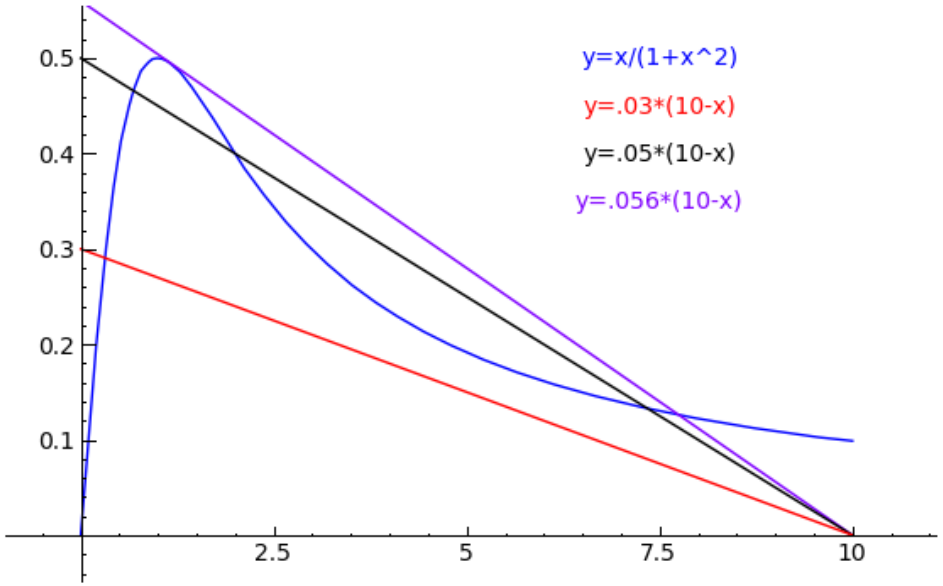
$$\rho\left(1 - \frac{u}{\kappa}\right) = \frac{u}{1+u^2}$$

On peut discuter graphiquement le nombre de solutions de cette équation.

Nombre de solutions stationnaires

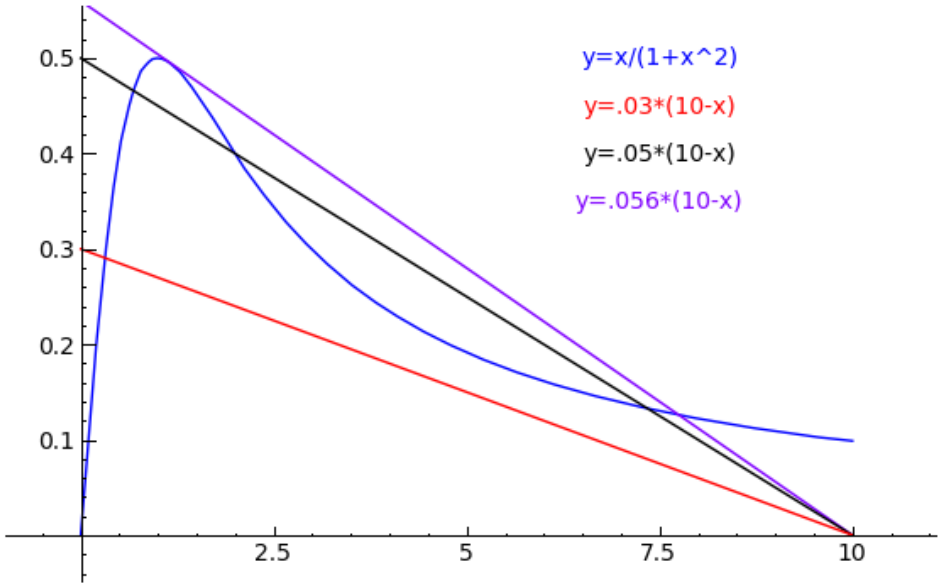


Nombre de solutions stationnaires



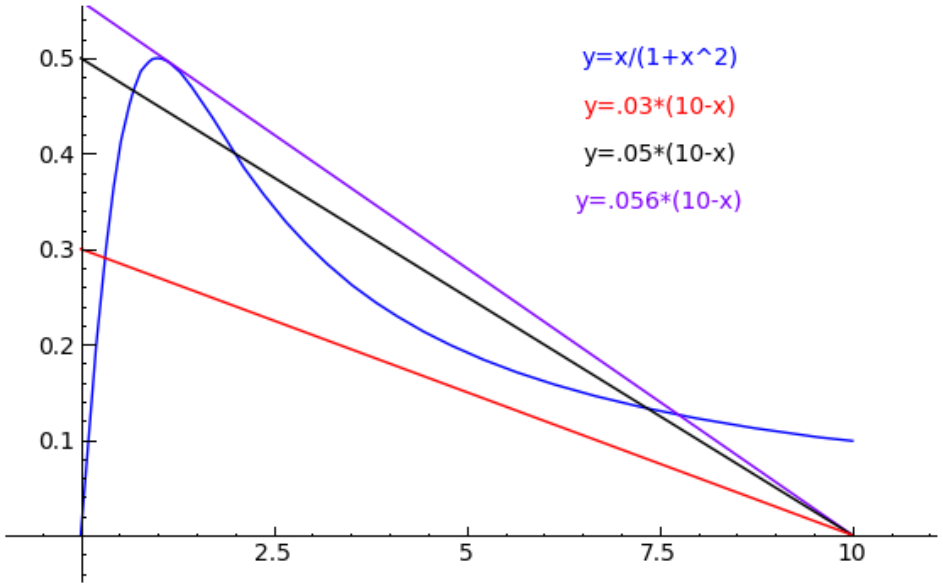
On trouve, suivant les valeurs de ρ et κ, soit 1, soit 3 solutions.

Nombre de solutions stationnaires



L'homme ne peut pas vraiment intervenir sur κ (lié à la quantité de nourriture disponible), mais il peut influer sur ρ (moins il y a d'oiseau, plus ρ est grand).

Nombre de solutions stationnaires



Question : pour κ fixé, que se passe-t-il quand ρ varie ?

Interprétation

On peut tirer des conséquences de ce graphique :

- Possibilité d'une explosion catastrophique de la population.
- Mieux vaut prévenir que guérir : une fois cette explosion arrivée, il est très difficile de revenir en arrière !

Sardines et requins

Les pêcheurs de la mer Adriatique pêchent des sardines et des requins. Les requins se nourrissent de sardines, et les sardines mangent des petits organismes, qui sont en quantité suffisante.
Les pêcheurs ont constaté que les stocks de sardines et de requins varient de façon périodique en fonction du temps, avec la même périodicité, mais que leurs cycles sont décalés.
Le mathématicien Volterra a proposé en 1926 un modèle décrivant ce phénomène.

Sardines et requins

(Modèle de Lotka-Volterra)

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) &= cx(t)y(t) - dy(t) \end{aligned}$$

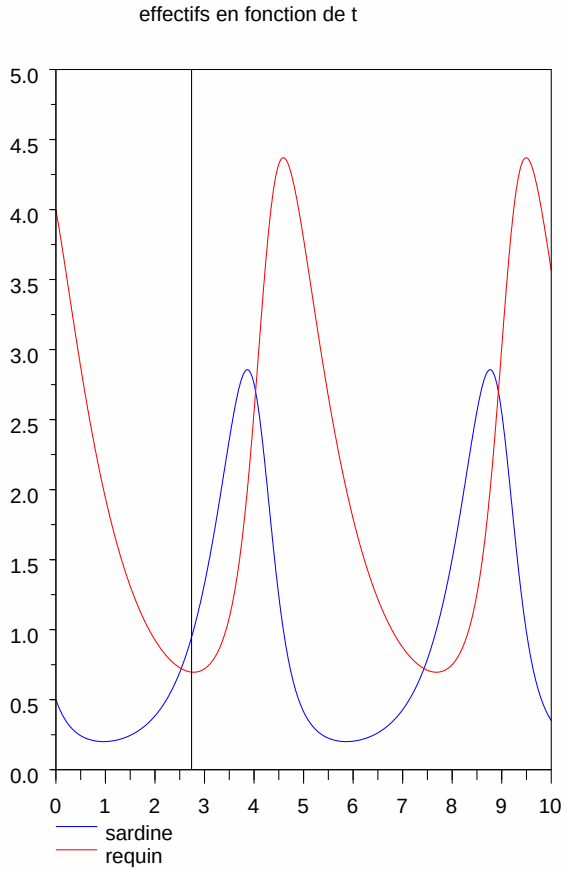
où

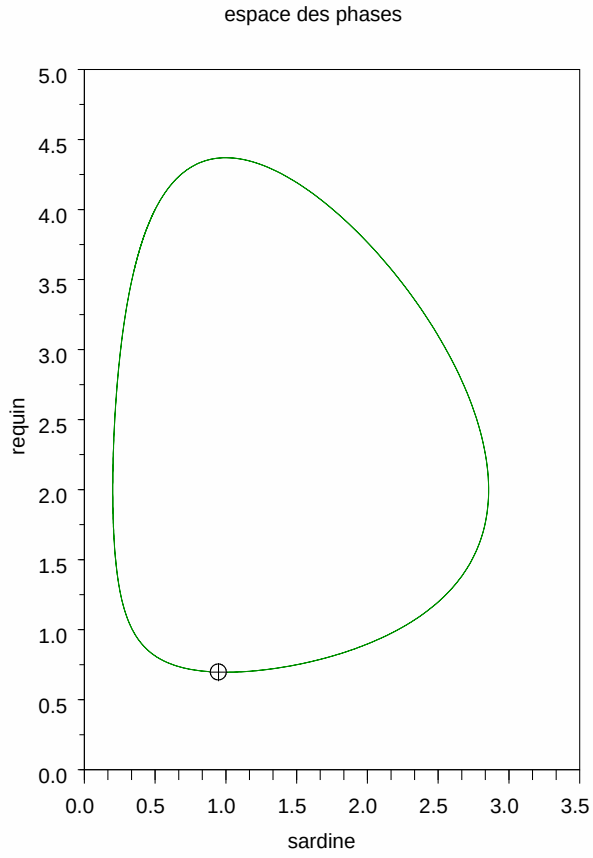
- $x(t) =$ *population de sardines à l'instant* t
- $y(t) =$ *population de requins à l'instant* t

Les deux termes en rouge correspondent à des termes d'interaction entre les deux espèces. Si ces termes n'étaient pas là, les sardines prolifèreraient suivant le modèle de Malthus, alors que les requins s'éteidraient de façon exponentielle.

Expérimentation numérique, $a = 2$, $b = c = d = 1$

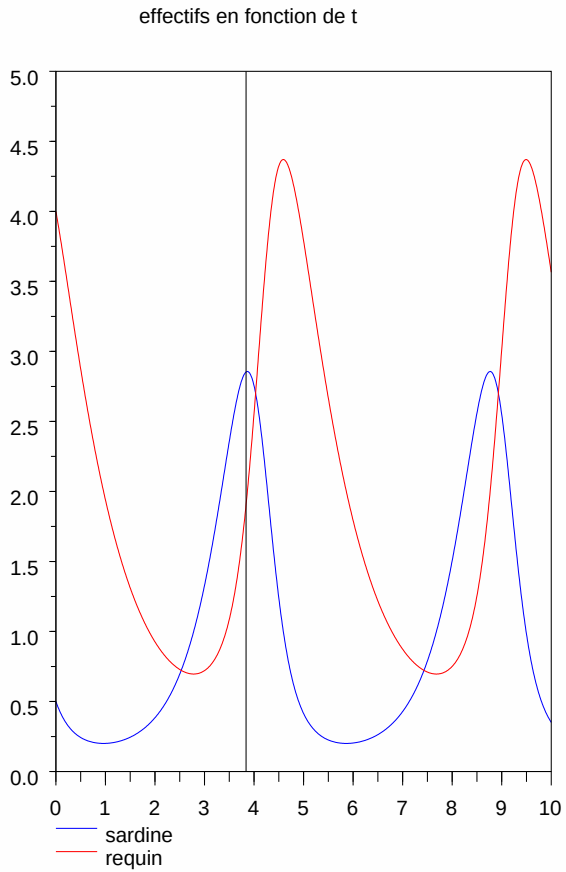
$t = 2.75$, y est minimal

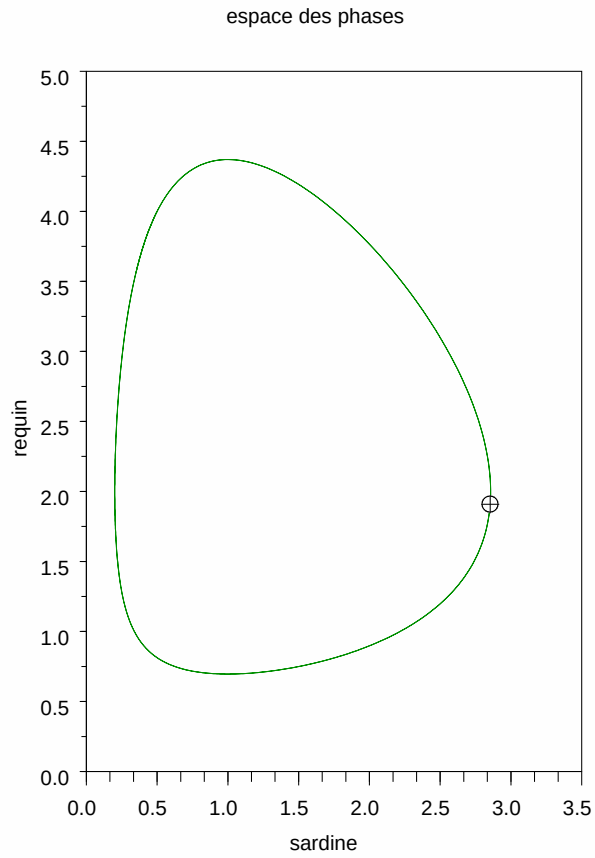




Expérimentation numérique, $a = 2$, $b = c = d = 1$

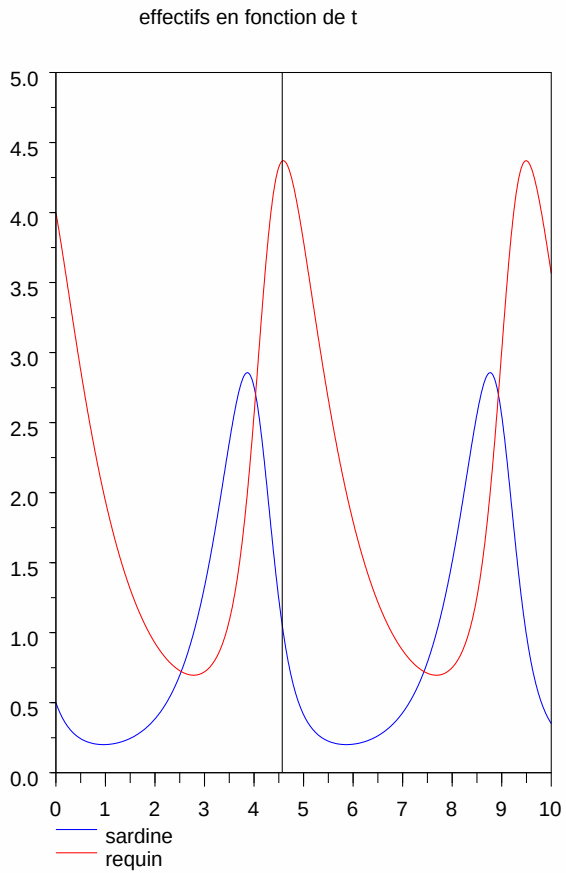
$t = 3.85$, x est maximal

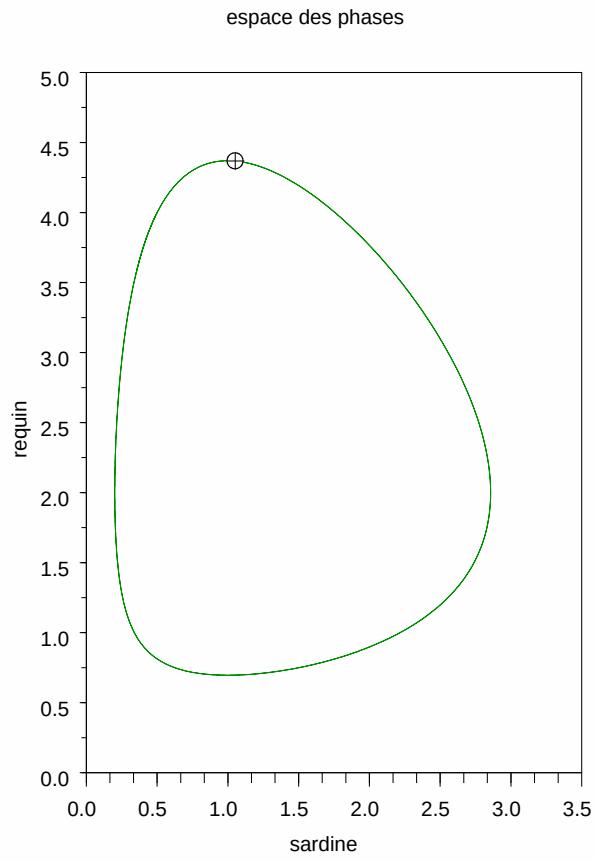




Expérimentation numérique, $a = 2$, $b = c = d = 1$

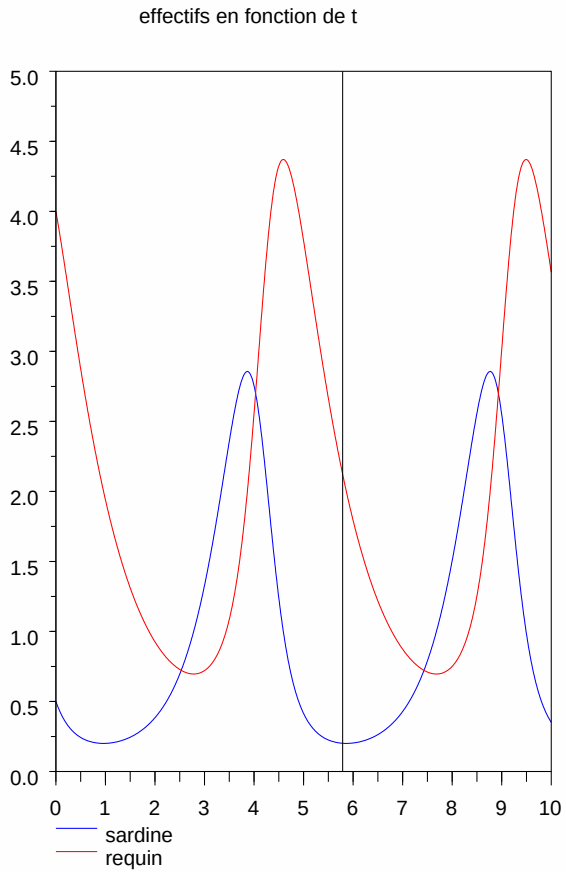
$t = 4.58$, y est maximal

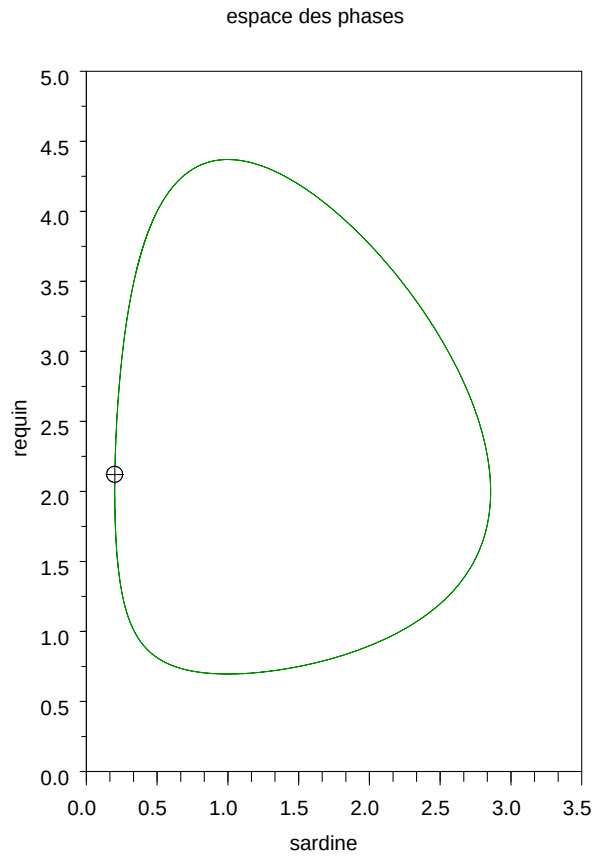




Expérimentation numérique, $a = 2$, $b = c = d = 1$

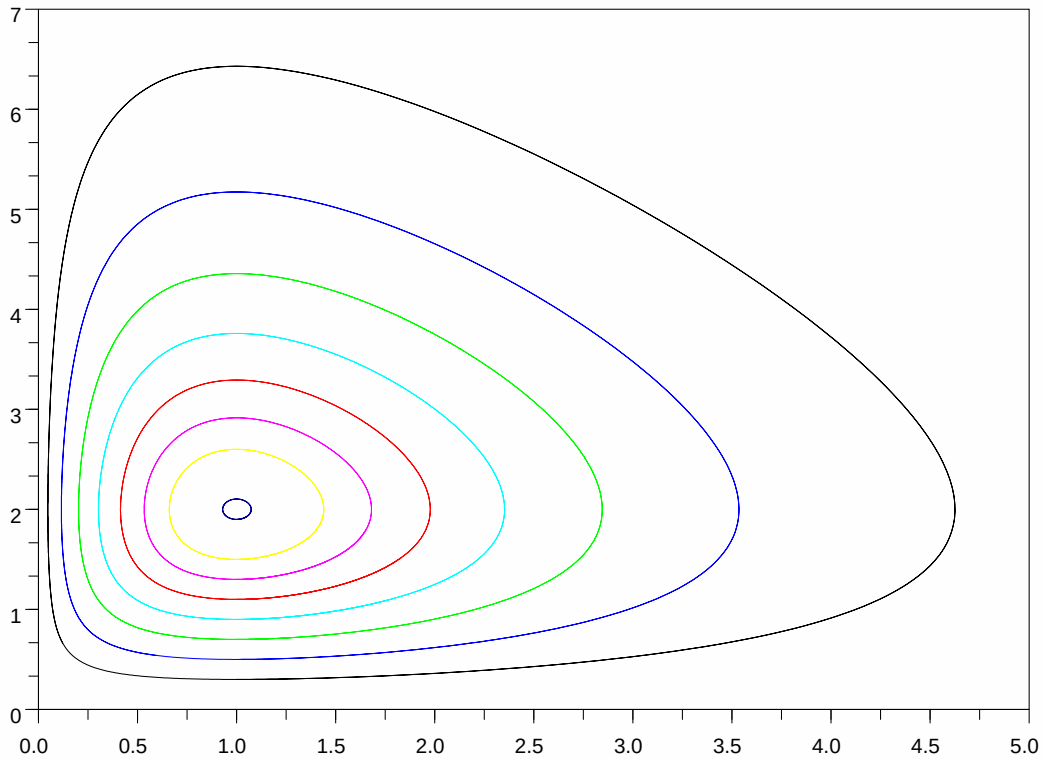
$t = 5.80$, x est minimal





Portrait de phase

On trace différentes trajectoires, correspondant à différentes conditions initiales, sur un même diagramme.



Influence de la pêche

Si on exerce une activité de pêche, les taux de mortalité des sardines et des requins augmentent d'une même valeur. Le système

(Lotka-Volterra sans pêche)

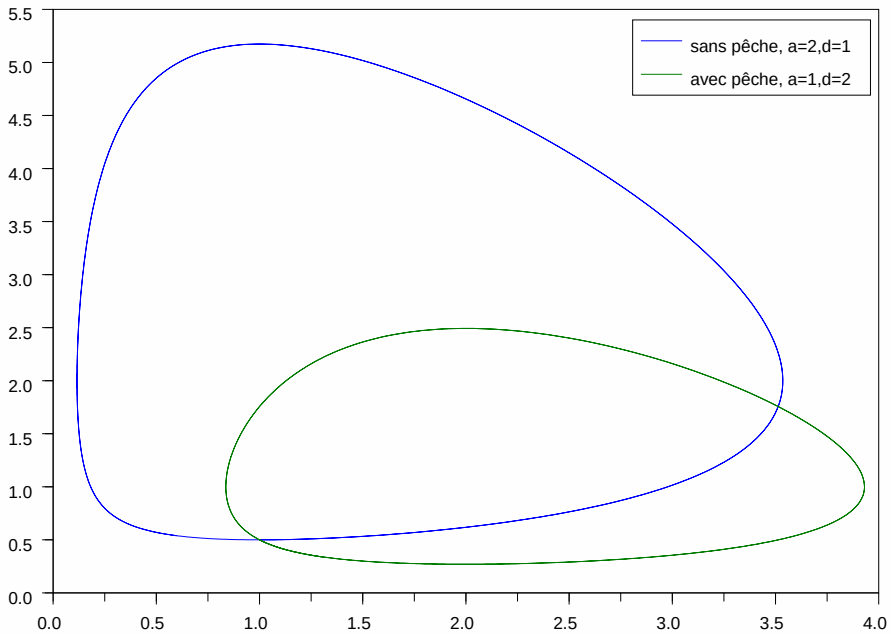
$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) &= cx(t)y(t) - dy(t) \end{aligned}$$

devient

(Lotka-Volterra avec pêche)

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) - \alpha x(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) &= cx(t)y(t) - dy(t) - \alpha y(t) \end{aligned}$$

Influence de la pêche



La pêche a fait augmenter la quantité de sardines !