

Triangulation des ensembles semi-algébriques p -adique

Luck Darnière

23 janvier 2020

- 1 Ensembles semi-algébriques p -adiques
 - Corps p -adiquement clos
 - Ensembles semi-algébriques
 - Élimination des quantificateurs
- 2 Triangulation p -adique et applications
 - Simplexes discrets
 - Simplexes p -adiques et triangulation
 - Rétraction
 - Découpage
- 3 Ingrédients de la preuve
 - Décomposition cellulaire et déformation
 - Monoplexe cellulaire
 - Pour aller plus loin. . .

Exemples

- Toute extension finie K_0 de \mathbb{Q}_p .

Exemples

- Toute extension finie K_0 de \mathbb{Q}_p .
- La clôture algébrique relative de \mathbb{Q} dans K_0 (pas complet).

Exemples

- Toute extension finie K_0 de \mathbb{Q}_p .
- La clôture algébrique relative de \mathbb{Q} dans K_0 (pas complet).
- Le complété pour la valuation t -adique du corps $\bigcup_{n \geq 1} K_0((t^{1/n}))$ des séries de Puiseux sur K_0 (groupe de valeurs $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$).

Exemples

- Toute extension finie K_0 de \mathbb{Q}_p .
- La clôture algébrique relative de \mathbb{Q} dans K_0 (pas complet).
- Le complété pour la valuation t -adique du corps $\bigcup_{n \geq 1} K_0((t^{1/n}))$ des séries de Puiseux sur K_0 (groupe de valeurs $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$).

K est *p -adiquement clos* s'il admet une valuation v telle que :

- 1) (K, v) est hensélien, de caractéristique nulle.
- 2) Le corps résiduel de (K, v) est fini, de caractéristique p .
- 3) Le groupe des valeurs $\mathcal{Z} = v(K^\times)$ est un *\mathbb{Z} -groupe* :
 - i) \mathcal{Z} a un plus petit élément > 0 (noté 1) ;
 - ii) $\mathcal{Z}/n\mathcal{Z} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1 Ensembles semi-algébriques p -adiques
 - Corps p -adiquement clos
 - **Ensembles semi-algébriques**
 - Élimination des quantificateurs
- 2 Triangulation p -adique et applications
 - Simplexes discrets
 - Simplexes p -adiques et triangulation
 - Rétraction
 - Découpage
- 3 Ingrédients de la preuve
 - Décomposition cellulaire et déformation
 - Monoplexe cellulaire
 - Pour aller plus loin. . .

Soit K un corps quelconque.

$$P_N^\times := \{y^N / y \in K^\times\}$$

$A \subseteq K^m$ est *semi-algébrique* s'il est réunion finie d'ensembles définis par :

$$f_1 = \dots = f_r = 0 \text{ et } g_1 \in P_{N_1}^\times \text{ et } \dots \text{ et } g_s \in P_{N_s}^\times$$

avec $f_i, g_i \in K[X_1, \dots, X_m]$.

Soit K un corps quelconque.

$$P_N^\times := \{y^N / y \in K^\times\}$$

$A \subseteq K^m$ est *semi-algébrique* s'il est réunion finie d'ensembles définis par :

$$f_1 = \dots = f_r = 0 \text{ et } g_1 \in P_{N_1}^\times \text{ et } \dots \text{ et } g_s \in P_{N_s}^\times$$

avec $f_i, g_i \in K[X_1, \dots, X_m]$.

Remarque

- Si K est algébriquement clos, $g_i \in P_N^\times \iff g_i \neq 0$.

Soit K un corps quelconque.

$$P_N^\times := \{y^N / y \in K^\times\}$$

$A \subseteq K^m$ est *semi-algébrique* s'il est réunion finie d'ensembles définis par :

$$f_1 = \dots = f_r = 0 \text{ et } g_1 \in P_{N_1}^\times \text{ et } \dots \text{ et } g_s \in P_{N_s}^\times$$

avec $f_i, g_i \in K[X_1, \dots, X_m]$.

Remarque

- Si K est algébriquement clos, $g_i \in P_N^\times \iff g_i \neq 0$.
- Si K est réel clos,

$$g_i \in P_{2k}^\times \iff g_i > 0.$$

$$g_i \in P_{2k+1}^\times \iff g_i \neq 0,$$

$f : A \subseteq K^m \rightarrow K^n$ est *semi-algébrique* si son graphe est une partie semi-algébrique de K^{m+n} .

1 Ensembles semi-algébriques p -adiques

- Corps p -adiquement clos
- Ensembles semi-algébriques
- **Élimination des quantificateurs**

2 Triangulation p -adique et applications

- Simplexes discrets
- Simplexes p -adiques et triangulation
- Rétraction
- Découpage

3 Ingrédients de la preuve

- Décomposition cellulaire et déformation
- Monoplexe cellulaire
- Pour aller plus loin. . .

Théorème (Chevalley (19??), Tarski (1948), Macintyre (1976))

Si K est algébriquement clos, réel clos ou p -adiquement clos, alors la projection sur K^m de tout ensemble semi-algébrique $A \subseteq K^{m+n}$ est encore semi-algébrique.

Autrement dit, pour les corps K de ce type :

- En partant des ensembles algébriques (définis par $f = 0$ avec f pol.) et en stabilisant par combinaisons booléennes et projections, on obtient *exactement* les ensembles semi-algébriques.

Théorème (Chevalley (19??), Tarski (1948), Macintyre (1976))

Si K est algébriquement clos, réel clos ou p -adiquement clos, alors la projection sur K^m de tout ensemble semi-algébrique $A \subseteq K^{m+n}$ est encore semi-algébrique.

Autrement dit, pour les corps K de ce type :

- En partant des ensembles algébriques (définis par $f = 0$ avec f pol.) et en stabilisant par combinaisons booléennes et projections, on obtient *exactement* les ensembles semi-algébriques.
- $A \subseteq K^m$ est semi-algébrique $\iff A$ est définissable (dans le langage des anneaux). Par exemple l'ensemble des $x \in K^m$ tels que

$$\exists y [\forall z, \exists t, f(x, y, z) \neq 0 \text{ et } g(x, z, t) = 0]$$

est définissable, donc semi-algébrique d'après ce théorème.

Pour toute la suite :

- K := un corps p -adiquement clos fixé.
- R := l'anneau de la valuation p -adique.
- v := la valuation p -adique.
- $|\cdot|$:= une notation multiplicative pour la valuation :

$$|x| \leq |y| \iff v(x) \geq v(y)$$

$$|x| = |0| \iff x = 0 \quad ; \quad |xy| = |x||y| \quad ; \quad |x + y| \leq \max(|x|, |y|)$$

- π := un élément tel que $v(\pi) = 1$.

Pour simplifier on se limite ici au cas où $v(K^\times) = \mathbb{Z}$

- ① Ensembles semi-algébriques p -adiques
 - Corps p -adiquement clos
 - Ensembles semi-algébriques
 - Élimination des quantificateurs

- ② Triangulation p -adique et applications
 - **Simplexes discrets**
 - Simplexes p -adiques et triangulation
 - Rétraction
 - Découpage

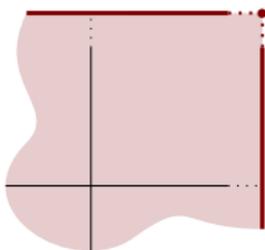
- ③ Ingrédients de la preuve
 - Décomposition cellulaire et déformation
 - Monoplexe cellulaire
 - Pour aller plus loin. . .

On pose $\Gamma := v(K) = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.

Notons que Γ est l'adhérence de \mathbb{Z} (pour la topologie image de celle de K par v).

On pose $\Gamma := v(K) = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.

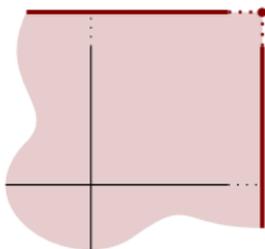
Notons que Γ est l'adhérence de \mathbb{Z} (pour la topologie image de celle de K par v).



Le point $a = (x, y) \in \Gamma^2$ est représenté par $(1 - 2^{-x}, 1 - 2^{-y})$.

On pose $\Gamma := v(K) = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.

Notons que Γ est l'adhérence de \mathbb{Z} (pour la topologie image de celle de K par v).

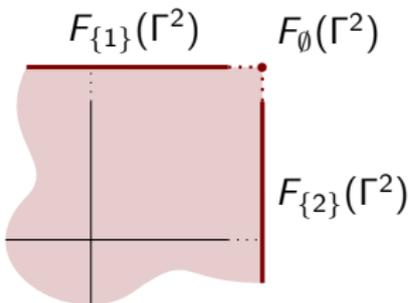


Le point $a = (x, y) \in \Gamma^2$ est représenté par $(1 - 2^{-x}, 1 - 2^{-y})$.

- Pour tout $a \in \Gamma^q$, $\text{Supp } a := \{i \in \{1, \dots, q\} / a_i < +\infty\}$.

On pose $\Gamma := v(K) = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.

Notons que Γ est l'adhérence de \mathbb{Z} (pour la topologie image de celle de K par v).

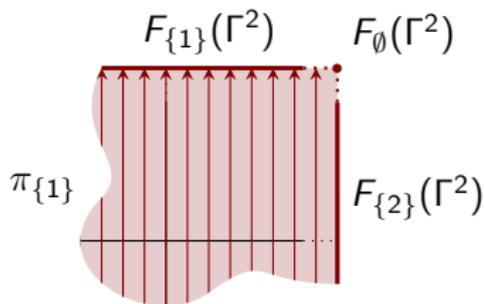


Le point $a = (x, y) \in \Gamma^2$ est représenté par $(1 - 2^{-x}, 1 - 2^{-y})$.

- Pour tout $a \in \Gamma^q$, $\text{Supp } a := \{i \in \{1, \dots, q\} / a_i < +\infty\}$.
- Pour tout $I \subseteq \{1, \dots, q\}$, $F_I(\Gamma^q) := \{a \in \Gamma^q / \text{Supp } a = I\}$.

On pose $\Gamma := v(K) = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.

Notons que Γ est l'adhérence de \mathbb{Z} (pour la topologie image de celle de K par v).

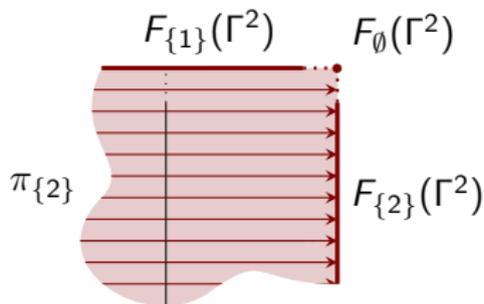


Le point $a = (x, y) \in \Gamma^2$ est représenté par $(1 - 2^{-x}, 1 - 2^{-y})$.

- Pour tout $a \in \Gamma^q$, $\text{Supp } a := \{i \in \{1, \dots, q\} / a_i < +\infty\}$.
- Pour tout $I \subseteq \{1, \dots, q\}$, $F_I(\Gamma^q) := \{a \in \Gamma^q / \text{Supp } a = I\}$.
- On note π_I la projection de Γ^m sur l'adhérence de $F_I(\Gamma^q)$.

On pose $\Gamma := v(K) = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.

Notons que Γ est l'adhérence de \mathbb{Z} (pour la topologie image de celle de K par v).

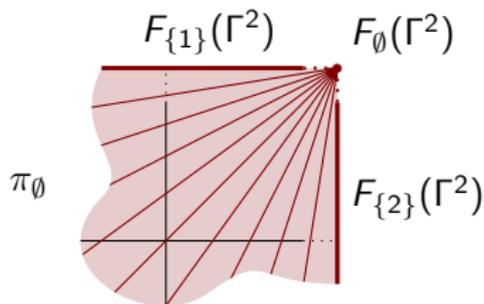


Le point $a = (x, y) \in \Gamma^2$ est représenté par $(1 - 2^{-x}, 1 - 2^{-y})$.

- Pour tout $a \in \Gamma^q$, $\text{Supp } a := \{i \in \{1, \dots, q\} / a_i < +\infty\}$.
- Pour tout $I \subseteq \{1, \dots, q\}$, $F_I(\Gamma^q) := \{a \in \Gamma^q / \text{Supp } a = I\}$.
- On note π_I la projection de Γ^m sur l'adhérence de $F_I(\Gamma^q)$.

On pose $\Gamma := v(K) = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.

Notons que Γ est l'adhérence de \mathbb{Z} (pour la topologie image de celle de K par v).



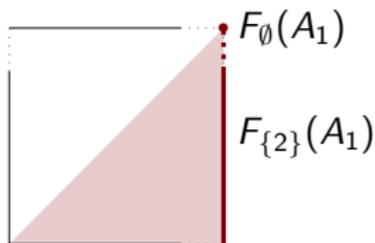
Le point $a = (x, y) \in \Gamma^2$ est représenté par $(1 - 2^{-x}, 1 - 2^{-y})$.

- Pour tout $a \in \Gamma^q$, $\text{Supp } a := \{i \in \{1, \dots, q\} / a_i < +\infty\}$.
- Pour tout $I \subseteq \{1, \dots, q\}$, $F_I(\Gamma^q) := \{a \in \Gamma^q / \text{Supp } a = I\}$.
- On note π_I la projection de Γ^m sur l'adhérence de $F_I(\Gamma^q)$.

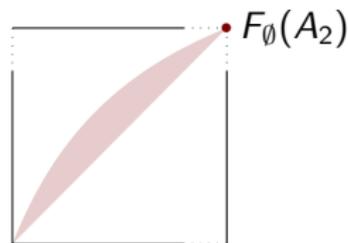
- Pour tout $A \subseteq \Gamma^q$ et tout $I \subseteq \{1, \dots, q\}$:

$$F_I(A) := \bar{A} \cap F_I(\Gamma^q) = \{a \in \bar{A} / \text{Supp } a = I\}.$$

S'il est non vide, $F_I(A)$ est appelé *face* de A de support I .



$$A_1 : 0 \leq y \leq x$$

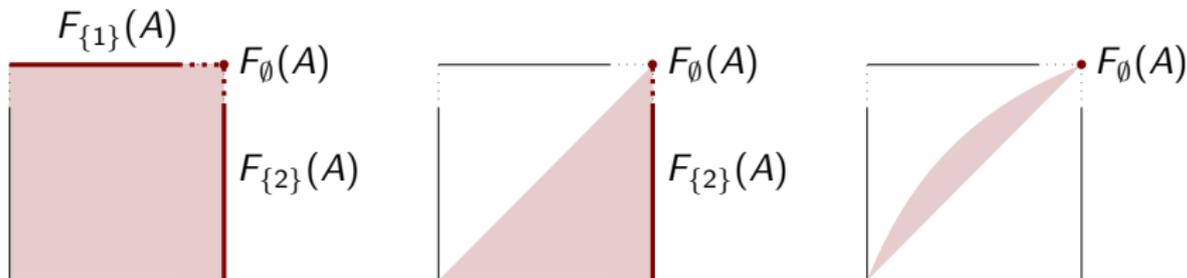


$$A_2 : 0 \leq x \leq y \leq 2x$$

Proposition

Soit $A \subseteq \mathbb{Z}^q$ définie par des inégalités affines. Soient $I, J \subseteq \{1, \dots, q\}$ tels que $F_I(A)$ et $F_J(A)$ sont non vides (i.e. sont des faces de A).

- 1 $F_{I \cap J}(A) \neq \emptyset$. Les faces de A forment donc un demi-treillis inférieur.
- 2 $F_J(A) \subseteq \overline{F_I(A)} \iff J \subseteq I$. Dans ce cas $F_J(A) = F_J(F_I(A))$.
- 3 $F_I(A) = \pi_I(A)$ est le projeté de A sur $F_I(\Gamma^q)$.



Proposition

Soit $A \subseteq \mathbb{Z}^q$ définie par des inégalités affines. Soient $I, J \subseteq \{1, \dots, q\}$ tels que $F_I(A)$ et $F_J(A)$ sont non vides (i.e. sont des faces de A).

- 1 $F_{I \cap J}(A) \neq \emptyset$. Les faces de A forment donc un demi-treillis inférieur.
- 2 $F_J(A) \subseteq \overline{F_I(A)} \iff J \subseteq I$. Dans ce cas $F_J(A) = F_J(F_I(A))$.
- 3 $F_I(A) = \pi_I(A)$ est le projeté de A sur $F_I(\Gamma^q)$.

Idée

Polytope discret = partie de \mathbb{Z}^q définie par des inégalités affines.

Proposition

Soit $A \subseteq \mathbb{Z}^q$ définie par des inégalités affines. Soient $I, J \subseteq \{1, \dots, q\}$ tels que $F_I(A)$ et $F_J(A)$ sont non vides (i.e. sont des faces de A).

- 1 $F_{I \cap J}(A) \neq \emptyset$. Les faces de A forment donc un demi-treillis inférieur.
- 2 $F_J(A) \subseteq \overline{F_I(A)} \iff J \subseteq I$. Dans ce cas $F_J(A) = F_J(F_I(A))$.
- 3 $F_I(A) = \pi_I(A)$ est le projeté de A sur $F_I(\Gamma^q)$.

Mauvaise idée !

Polytope discret \neq partie de \mathbb{Z}^q définie par des inégalités affines.

Exemple

Sur $\widehat{A} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / 0 \leq y \leq x\}$ considérons l'ensemble A des $(x, y, t) \in \widehat{A} \times \mathbb{Z}$ tels que

$$\mu(x, y) \leq t \leq \nu(x, y)$$

où $\mu(x, y) = \nu(x, y) = 2y - 2x$ est affine (et positive) sur \widehat{A} . Alors $F_3(A) = 2\mathbb{N}$ n'est pas définissable uniquement par des inégalités affines.

Exemple

Sur $\widehat{A} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / 0 \leq y \leq x\}$ considérons l'ensemble A des $(x, y, t) \in \widehat{A} \times \mathbb{Z}$ tels que

$$\mu(x, y) \leq t \leq \nu(x, y)$$

où $\mu(x, y) = \nu(x, y) = 2y - 2x$ est affine (et positive) sur \widehat{A} . Alors $F_3(A) = 2\mathbb{N}$ n'est pas définissable uniquement par des inégalités affines.

- $f : X \subseteq \Gamma^q \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$ est *largement continue* si elle se prolonge en une fonction continue sur \overline{X} .

Remarque

La fonction $\mu(x, y) = 2y - 2x$ de l'exemple, n'a pas de limite en $(+\infty, +\infty)$. Elle n'est donc pas largement continue sur \widehat{A} .

$A \subseteq \mathbb{Z}^q$ est un *polytope discret* si

- $q = 0$ et $A = \mathbb{Z}^0$, ou ;
- $q \geq 1$, le projeté \widehat{A} de A sur \mathbb{Z}^{q-1} est un polytope discret, et A est l'ensemble des $(x, t) \in \widehat{A} \times \mathbb{Z}$ tels que

$$\nu(x) \leq t \leq \mu(x)$$

où $\mu, \nu : \widehat{A} \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$ sont des fonctions **\mathbb{Q} -affines** (ou $+\infty$) **positives** et **largement continues**.

Ceci se generalise à $A \subseteq F_I(\Gamma^q)$, en identifiant $F_I(\Gamma^q) \simeq \mathbb{Z}^{\text{Card } I}$.

Proposition

Soit $A \subseteq \mathbb{Z}^q$ un polytope, ensemble des $(x, t) \in \hat{A} \times \mathbb{Z}$ tels que

$$\mu(x) \leq t \leq \nu(x).$$

Soit $B = F_J(A)$ une face de A , et $\hat{J} = J \setminus \{q\}$ le support de \hat{B} .

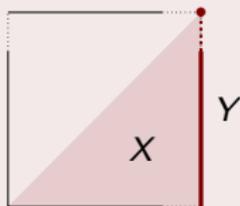
Alors $\hat{B} = F_{\hat{J}}(\hat{A})$ et B est l'ensemble des $(x, t) \in F_J(\Gamma^q)$ tels $x \in \hat{B}$ et

$$\bar{\mu}(x) \leq t \leq \bar{\nu}(x).$$

Pour en conclure que B est un polytope, il faudrait encore que $\bar{\mu}|_{\hat{B}}$ et $\bar{\nu}|_{\hat{B}}$ soient aussi \mathbb{Q} -affines ou $+\infty$.

Proposition (Dichotomie)

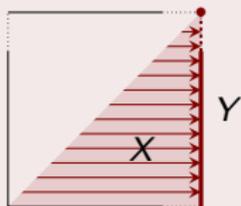
Soit $X \subseteq F_1(\mathbb{Z}^q)$ définie par des inégalités affines. Soit $Y = F_J(X)$ une face propre de X , et soit $f : X \cup Y \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$ une fonction \mathbb{Q} -affine sur X , continue sur $X \cup Y$.



- Si $f(y) = +\infty$ en un point $y \in Y$ alors $f|_Y = +\infty$.

Proposition (Dichotomie)

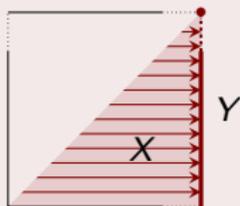
Soit $X \subseteq F_I(\mathbb{Z}^q)$ définie par des inégalités affines. Soit $Y = F_J(X)$ une face propre de X , et soit $f : X \cup Y \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$ une fonction \mathbb{Q} -affine sur X , continue sur $X \cup Y$.



- Si $f(y) = +\infty$ en un point $y \in Y$ alors $f|_Y = +\infty$.
- Sinon, $f|_Y$ est \mathbb{Q} -affine et $f|_X = f|_Y \circ \pi_J$.

Proposition (Dichotomie)

Soit $X \subseteq F_I(\mathbb{Z}^q)$ définie par des inégalités affines. Soit $Y = F_J(X)$ une face propre de X , et soit $f : X \cup Y \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$ une fonction \mathbb{Q} -affine sur X , continue sur $X \cup Y$.



- Si $f(y) = +\infty$ en un point $y \in Y$ alors $f|_Y = +\infty$.
- Sinon, $f|_Y$ est \mathbb{Q} -affine et $f|_X = f|_Y \circ \pi_J$.

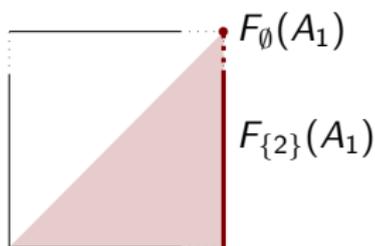
Corollaire

Toutes les faces d'un polytope discret A sont des polytopes discrets. Elles forment un complexe qui partitionne \overline{A} .

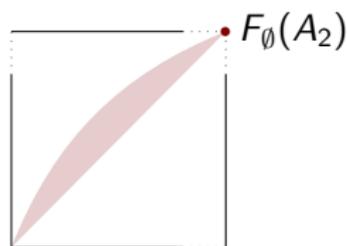
Rappel

Les simplexes réels sont, parmi les polytopes de dimension $d \geq 1$ donnée, ceux dont le nombre de facettes est minimal ($= d + 1$).

- Si les faces d'un polytope discret A forment une chaîne pour l'ordre de spécialisation, on dit que A est un *simplexe discret*.



$$A_1 : 0 \leq y \leq x$$

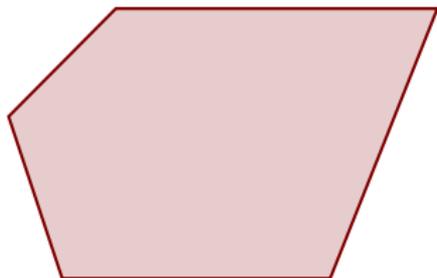


$$A_2 : 0 \leq x \leq y \leq 2x$$

Proposition

Soit $A \subseteq \Gamma^q$ un polytope discret, et \mathcal{A} l'ensemble de ses faces.
 \mathcal{A} se raffine en un complexe simplicial discret (= complexe de simplexes discrets).

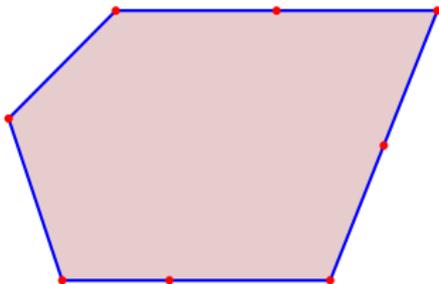
C'est une application du « **théorème de découpage monotopique** », analogue discret du « théorème de découpage barycentrique » des polytopes réels.



Proposition

Soit $A \subseteq \Gamma^q$ un polytope discret, et \mathcal{A} l'ensemble de ses faces.
 \mathcal{A} se raffine en un complexe simplicial discret (= complexe de simplexes discrets).

C'est une application du « **théorème de découpage monotopique** », analogue discret du « théorème de découpage barycentrique » des polytopes réels.

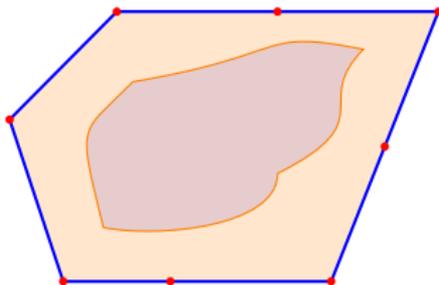


Proposition

Soit $A \subseteq \Gamma^q$ un polytope discret, et \mathcal{A} l'ensemble de ses faces.

\mathcal{A} se raffine en un complexe simplicial discret (= complexe de simplexes discrets).

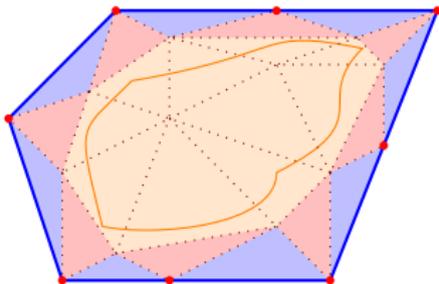
C'est une application du « **théorème de découpage monotopique** », analogue discret du « théorème de découpage barycentrique » des polytopes réels.



Proposition

Soit $A \subseteq \Gamma^q$ un polytope discret, et \mathcal{A} l'ensemble de ses faces.
 \mathcal{A} se raffine en un complexe simplicial discret (= complexe de simplexes discrets).

C'est une application du « **théorème de découpage monotopique** », analogue discret du « théorème de découpage barycentrique » des polytopes réels.



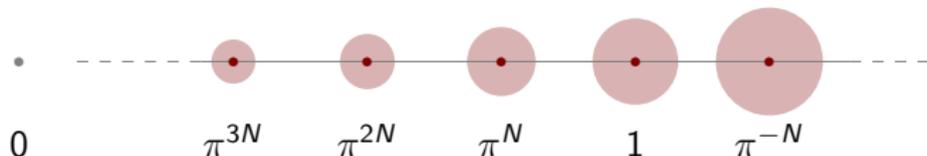
- 1 Ensembles semi-algébriques p -adiques
 - Corps p -adiquement clos
 - Ensembles semi-algébriques
 - Élimination des quantificateurs

- 2 Triangulation p -adique et applications
 - Simplexes discrets
 - **Simplexes p -adiques et triangulation**
 - Rétraction
 - Découpage

- 3 Ingrédients de la preuve
 - Décomposition cellulaire et déformation
 - Monoplexe cellulaire
 - Pour aller plus loin. . .

Pour tous $N, M \in \mathbb{N}^\times$ on considère les sous-groupes suivants de K^\times , semi-algébriques, ouverts-fermés et d'indices fini dans K^\times .

$$Q_{N,M}^\times := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \pi^{kN} (1 + \pi^M R) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B(\pi^{kN}, \pi^{kN+M})$$



Remarques

- ① $Q_{N,M}^\times$ est un voisinage semi-algébrique de $\{\pi^{kN}\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Il est d'autant plus petit que N et M sont grands.
- ② $Q_{N,M}^\times$ est un sous-groupe de $P_N^\times = \{x^N / x \in K^\times\}$ (d'indice fini et ouvert-fermé dans P_N^\times).

Pour tous $N, M \in \mathbb{N}^\times$ on considère les sous-groupes suivants de K^\times , semi-algébriques, ouverts-fermés et d'indices fini dans K^\times .

$$Q_{N,M}^\times := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \pi^{kN} (1 + \pi^M R) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B(\pi^{kN}, \pi^{kN+M})$$

Lemme

La fonction $x \mapsto x^e$ est un homéomorphisme de $Q_{1, v(e)+1}^\times$ dans $Q_{e, 2v(e)+1}^\times$.

La réciproque définit une fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{e}}$ sur $Q_{e, 2v(e)+1}^\times$.

À savoir

$Q_{N,M}^\times \subseteq Q_{e, 2v(e)+1}^\times$, dès que $e|N$ et $2v(e) < M$.

Les *polytopes* (resp. *simplexes*) *p*-adiques sont les parties de K^q de la forme $v^{-1}(S) \cap (Q_{1,M}^\times)^q$ où $S \subseteq \Gamma^q$ est un polytope (resp. simplexe) discret.

Fait

Les simplexes *p*-adiques héritent de toutes les bonnes propriétés des simplexes discrets, notamment en ce qui concerne leurs faces.

Un *complexe simplicial* p -adique est une famille finie \mathcal{S} de simplexes p -adiques 2 à 2 disjoints (éventuellement pris dans différentes copies de R^q), qui ne se touchent que le long de leurs faces. On note $\bigsqcup \mathcal{S}$ leur réunion disjointe.

Théorème (Triangulation p -adique (simplifiée))

- 1 Pour tout ensemble semi-algébrique $X \subseteq K^m$, il existe un complexe simplicial p -adique \mathcal{S} et un homéomorphisme semi-algébrique $\varphi : \bigsqcup \mathcal{S} \rightarrow X$.
- 2 Étant données des fonctions semi-algébriques $\theta_1, \dots, \theta_r : X \rightarrow K$, on peut exiger de plus que les valuations des $\theta_i \circ \varphi(y)$ soient des fonctions \mathbb{Z} -affines des valuations des coordonnées de $y \in \bigsqcup \mathcal{S}$.

Un *complexe simplicial* p -adique est une famille finie \mathcal{S} de simplexes p -adiques 2 à 2 disjoints (éventuellement pris dans différentes copies de R^q), qui ne se touchent que le long de leurs faces. On note $\bigsqcup \mathcal{S}$ leur réunion disjointe.

Théorème (Triangulation p -adique (simplifiée))

- 1 Pour tout ensemble semi-algébrique $X \subseteq K^m$, il existe un complexe simplicial p -adique \mathcal{S} et un homéomorphisme semi-algébrique $\varphi : \bigsqcup \mathcal{S} \rightarrow X$.
- 2 Étant données des fonctions semi-algébriques $\theta_1, \dots, \theta_r : X \rightarrow K$, on peut exiger de plus que les valuations des $\theta_i \circ \varphi(y)$ soient des fonctions \mathbb{Z} -affines des valuations des coordonnées de $y \in \bigsqcup \mathcal{S}$.

Corollaire

Le cardinal de l'ensemble des classes d'homéomorphismes des ensembles semi-algébriques sur K est le cardinal du groupe des valeurs $v(K^\times)$.

- 1 Ensembles semi-algébriques p -adiques
 - Corps p -adiquement clos
 - Ensembles semi-algébriques
 - Élimination des quantificateurs
- 2 Triangulation p -adique et applications
 - Simplexes discrets
 - Simplexes p -adiques et triangulation
 - **Rétraction**
 - Découpage
- 3 Ingrédients de la preuve
 - Décomposition cellulaire et déformation
 - Monoplexe cellulaire
 - Pour aller plus loin. . .

Une *rétraction* de $A \subseteq K^m$ non vide sur $B \subseteq A$ est une application continue $\rho : A \rightarrow B$ telle que $\rho(x) = x$ pour tout $x \in B$.

NB₁ : Une telle rétraction existe $\Rightarrow B$ est fermé dans A .

Une *rétraction* de $A \subseteq K^m$ non vide sur $B \subseteq A$ est une application continue $\rho : A \rightarrow B$ telle que $\rho(x) = x$ pour tout $x \in B$.

NB₁ : Une telle rétraction existe $\Rightarrow B$ est fermé dans A .

NB₂ : Dans le cas réel, les obstructions sont contrôlées par l'*homotopie*.

Une *rétraction* de $A \subseteq K^m$ non vide sur $B \subseteq A$ est une application continue $\rho : A \rightarrow B$ telle que $\rho(x) = x$ pour tout $x \in B$.

NB₁ : Une telle rétraction existe $\Rightarrow B$ est fermé dans A .

NB₂ : Dans le cas réel, les obstructions sont contrôlées par l'*homotopie*.

Soit R la boule unité de K (i.e. l'anneau de la valuation). Soit $X \subseteq K^m$ un ensemble semi-algébrique non vide, et soit $a \in X$.

Pour tout « *lacet* » (application continue $\gamma : R \rightarrow X$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$) l'application $\Phi : X \times R \rightarrow X$ définie par

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } v(t) = 0 \\ a & \text{si } v(t) \geq 1 \end{cases}$$

déforme continûment γ en un point : X est « *contractile* ».

Théorème (Rétraction)

Soit $B \subseteq A \subseteq K^m$ des ensembles semi-algébriques. Il existe une rétraction semi-algébrique de A sur $B \Leftrightarrow B$ est fermé dans A .

Théorème (Rétraction)

Soit $B \subseteq A \subseteq K^m$ des ensembles semi-algébriques. Il existe une rétraction semi-algébrique de A sur $B \Leftrightarrow B$ est fermé dans A .

Corollaire (Prolongement « à la Tietze-Urysohn »)

Soit $A \subseteq K^m$ un ensemble semi-algébrique. Toute fonction semi-algébrique $f : B \rightarrow K$ continue sur une partie B fermée dans A se prolonge en une fonction semi-algébrique continue $\tilde{f} : A \rightarrow K$ telle que $f(A) = f(B)$.

Théorème (Rétraction)

Soit $B \subseteq A \subseteq K^m$ des ensembles semi-algébriques. Il existe une rétraction semi-algébrique de A sur $B \Leftrightarrow B$ est fermé dans A .

Corollaire (Prolongement « à la Tietze-Urysohn »)

Soit $A \subseteq K^m$ un ensemble semi-algébrique. Toute fonction semi-algébrique $f : B \rightarrow K$ continue sur une partie B fermée dans A se prolonge en une fonction semi-algébrique continue $\tilde{f} : A \rightarrow K$ telle que $f(A) = f(B)$.

Remarque

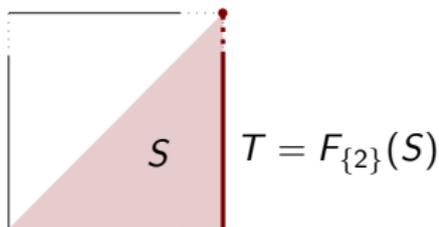
Cluckers et Martin ont obtenu indépendamment ces résultats dans le cas particulier où $A = K^m$, mais pour les sous-analytiques aussi bien que les semi-algébriques.

Théorème (Rétraction)

Soit $B \subseteq A \subseteq K^m$ des ensembles semi-algébriques. Il existe une rétraction semi-algébrique de A sur $B \Leftrightarrow B$ est fermé dans A .

Idée de la preuve

Par triangulation on se ramène au cas où $A = \overline{S}$ et $T = \overline{T}$, avec S un simplexe p -adique et $T = F_I(S)$ une face de S .

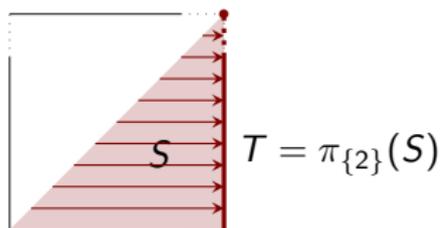


Théorème (Rétraction)

Soit $B \subseteq A \subseteq K^m$ des ensembles semi-algébriques. Il existe une rétraction semi-algébrique de A sur $B \Leftrightarrow B$ est fermé dans A .

Idée de la preuve

Par triangulation on se ramène au cas où $A = \bar{S}$ et $T = \bar{T}$, avec S un simplexe p -adique et $T = F_I(S)$ une face de S . Puis on utilise que $F_I(S) = \pi_I(S)$.



- 1 Ensembles semi-algébriques p -adiques
 - Corps p -adiquement clos
 - Ensembles semi-algébriques
 - Élimination des quantificateurs

- 2 Triangulation p -adique et applications
 - Simplexes discrets
 - Simplexes p -adiques et triangulation
 - Rétraction
 - **Découpage**

- 3 Ingrédients de la preuve
 - Décomposition cellulaire et déformation
 - Monoplexe cellulaire
 - Pour aller plus loin. . .

Théorème (Découpage)

*Soit $A \subseteq K^m$ une partie semi-algébrique relativement ouverte sans point isolé.
Soient X_1, \dots, X_r des fermés semi-algébriques tels que $X_1 \cup \dots \cup X_r = \partial A$.
Il existe une partition de A en parties semi-algébriques A_1, \dots, A_r telles que $\partial A_k = X_k$ pour $1 \leq k \leq r$.*

Théorème (Découpage)

Soit $A \subseteq K^m$ une partie semi-algébrique relativement ouverte sans point isolé.
Soient X_1, \dots, X_r des fermés semi-algébriques tels que $X_1 \cup \dots \cup X_r = \partial A$.
Il existe une partition de A en parties semi-algébriques A_1, \dots, A_r telles que $\partial A_k = X_k$ pour $1 \leq k \leq r$.

Idée de la preuve

Par triangulation on se ramène au cas où $A = S$ est un simplexe p -adique, et les $X_i = T_i$ des réunions de faces propres de A . Il suffit de montrer le résultat pour $r = 2$.

Si par exemple $X_1 = X_2 = \partial S$, tous deux sont l'adhérence de la facette T de S .
Soit $i \in \text{Supp } S \setminus \text{Supp } T$, il suffit de poser

$$S_1 = \{a \in S / v(a_i) \text{ pair}\} \quad S_2 = \{a \in S / v(a_i) \text{ impair}\}$$

- ① Ensembles semi-algébriques p -adiques
 - Corps p -adiquement clos
 - Ensembles semi-algébriques
 - Élimination des quantificateurs

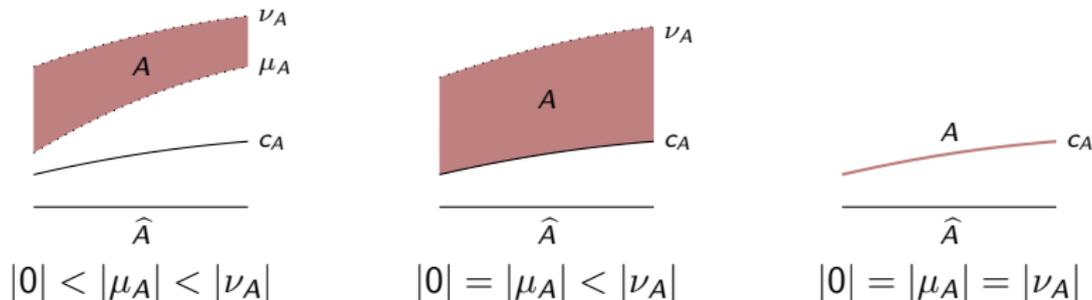
- ② Triangulation p -adique et applications
 - Simplexes discrets
 - Simplexes p -adiques et triangulation
 - Rétraction
 - Découpage

- ③ Ingrédients de la preuve
 - **Décomposition cellulaire et déformation**
 - Monoplexe cellulaire
 - Pour aller plus loin. . .

Soit $G = P_N^\times$ ou $Q_{N,M}^\times$, on appellera *cellule* modulo G l'ensemble A des $(x, t) \in R^d \times K$ tels que

$$|\mu_A(x)| \leq |t - c_A(x)| \leq |\nu_A(x)| \quad \text{et} \quad t - c_A(x) \in \lambda_A G$$

où $\lambda_A \in K$ et $c_A, \mu_A, \nu_A : X \subseteq R^m \rightarrow K$ sont des fonctions semi-algébriques, avec μ_A, ν_A jamais nulles ou identiquement nulles sur X .



Le projeté \hat{A} de A sur R^m (en général $\hat{A} = X$) est appelé le *socle* de A .

Si c_A, μ_A, ν_A se prolongent en fonctions continues sur l'adhérence de \hat{A} , on dira qu'elles sont *largement continues* (et que A elle-même l'est aussi).

Théorème (Denef 1984)

Tout ensemble semi-algébrique $S \subseteq \mathbb{R}^m$ admet une partition finie en cellules modulo P_N^\times , pour un certain $N \in \mathbb{N}^$.*

Pour chaque $e \in \mathbb{N}^\times$, soit $U_e = \{x \in K^\times / x^e = 1\}$.

Théorème (Denef 1984, Cluckers 2004)

Soient $\theta_1, \dots, \theta_r : X \subseteq K^m \rightarrow K$ des fonctions semi-algébriques. Il existe un entier $e \geq 1$ ayant la propriété suivante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des entiers $N, M \in \mathbb{N}^*$ tels que $e|N$ et $M > v(e)$, et une partition finie \mathcal{A} de X en cellules A modulo $Q_{N,M}^\times$ sur chacune desquelles, pour $1 \leq i \leq r$,

$$\theta_i(x, t) = \chi(x, t) \cdot (1 + \pi^n \omega(x, t)) \cdot h(x) \cdot [\lambda_A^{-1}(t - c_A(x))]^{\frac{\alpha}{e}}$$

où $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $\chi : A \rightarrow U_e$, $\omega : A \rightarrow R$, $h : \hat{A} \rightarrow K$ sont des fonctions semi-algébriques (dépendants de i et de A).

Nous dirons que \mathcal{A} est une *préparation d'indice e* des θ_i en cellules modulo $Q_{N,M}^\times$.

Préliminaire

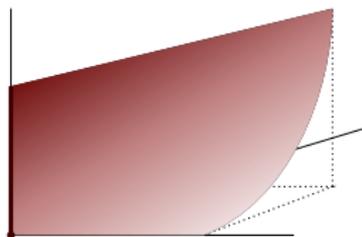
Obtenir un résultat similaire avec des cellules largement continues.

Préliminaire

Obtenir un résultat similaire avec des cellules largement continues.

Problème

Selon la forme du domaine X des θ_i , ce n'est pas toujours possible.

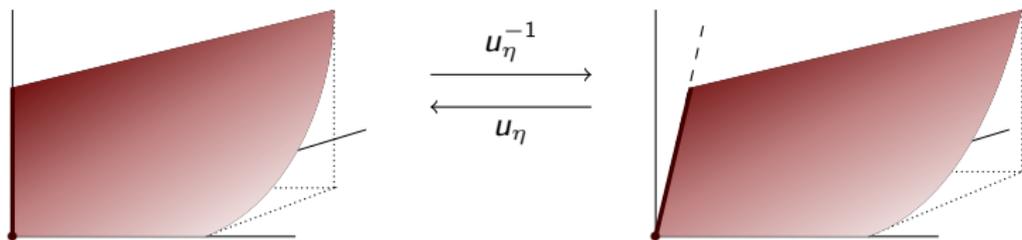


$$X : xz = y$$

Solution

Utiliser une déformation linéaire $u_\eta : R^{m+1} \rightarrow R^{m+1}$, avec $\eta \in R^m$ (arbitrairement petit).

$$u_\eta : (x, t) \mapsto (x + t\eta, t)$$



Après déformation, la triangulation des semi-algébriques dans R^m donne le résultat voulu (première étape de la triangulation dans R^{m+1}).

Théorème (Préparation largement continue après déformation)

Soient $\theta_1, \dots, \theta_r : X \subseteq R^{m+1} \rightarrow R$ des fonctions semi-algébriques. Il existe un entier $e \geq 1$ ayant la propriété suivante.

Pour tout entier $n \geq 1$ il existe, pour un certain $N \geq 1$ multiple de e , et un certain $M > 2\nu(e)$:

- une déformation linéaire u_η de R^{m+1} , et ;
 - une partition \mathcal{A} de $u_\eta^{-1}(X)$ en cellules modulo $Q_{N,M}^\times$ largement continues ;
- telle que \mathcal{A} soit une préparation d'indice e des $\theta_i \circ u_\eta$.

- ① Ensembles semi-algébriques p -adiques
 - Corps p -adiquement clos
 - Ensembles semi-algébriques
 - Élimination des quantificateurs

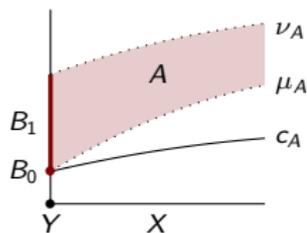
- ② Triangulation p -adique et applications
 - Simplexes discrets
 - Simplexes p -adiques et triangulation
 - Rétraction
 - Découpage

- ③ Ingrédients de la preuve
 - Décomposition cellulaire et déformation
 - **Monoplexe cellulaire**
 - Pour aller plus loin. . .

Si une cellule A est largement continue, son bord ∂A se décompose naturellement en cellules B telles que

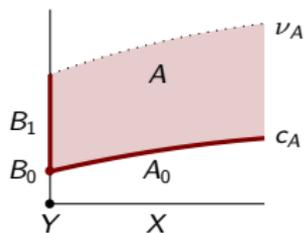
$$(c_B, \mu_B, \nu_B) = (\bar{c}_A, \bar{\mu}_A, \bar{\nu}_A \text{ ou } 0)|_{\widehat{B}}$$

Exemples



$$B_0 : (\bar{c}_A, \bar{\mu}_A, 0)|_Y$$

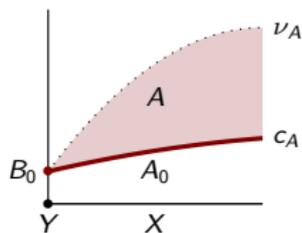
$$B_1 : (\bar{c}_A, \bar{\mu}_A, \bar{\nu}_A)|_Y$$



$$B_0 : (\bar{c}_A, \bar{\mu}_A, 0)|_Y$$

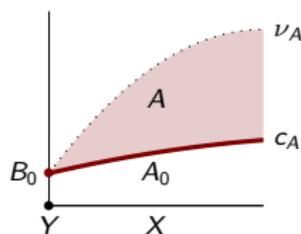
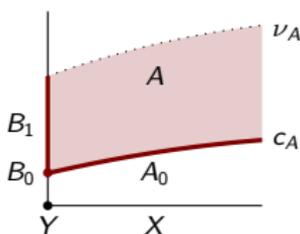
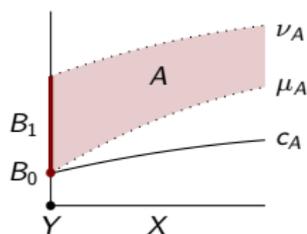
$$B_1 : (\bar{c}_A, \bar{\mu}_A, \bar{\nu}_A)|_Y$$

$$A_0 : (\bar{c}_A, \bar{\mu}_A, 0)|_X$$



$$B_0 : (\bar{c}_A, \bar{\mu}_A, \bar{\nu}_A)|_Y$$

$$A_0 : (\bar{c}_A, \bar{\mu}_A, 0)|_X$$



J'appellerai ici A_0 , B_0 , B_1 les *côtés* de A .

A est un *complexe cellulaire* si $\forall A, B \in \mathcal{A}$,

$$B \subseteq \partial A \implies B = B_0 \text{ ou } B = B_1 \text{ ou } B = A_0.$$

C'est un *monoplexe cellulaire* si, de plus, $\forall A, B, B' \in \mathcal{A}$,

$$B, B' \subseteq \partial A \implies B \subseteq \partial B' \text{ ou } B' \subseteq \partial B \text{ ou } B = B'.$$

But

Partant d'une préparation \mathcal{A} des fonctions $(\theta_i \circ u_{\eta})_{i \leq r}$ en cellules largement continues, construire une préparation plus fine \mathcal{E} dont les cellules forment un complexe, voire un monoplexe cellulaire.

Remarque

La construction d'un tel monoplexe cellulaire est au cœur de la démonstration, par récurrence sur m , du théorème de triangulation p -adique : les complexes simpliciaux p -adiques sont un cas *très* particulier de monoplexes cellulaires.

But

Partant d'une préparation \mathcal{A} des fonctions $(\theta_i \circ u_{\eta})_{i \leq r}$ en cellules largement continues, construire une **préparation** plus fine \mathcal{E} dont les cellules forment un complexe, voire un monoplexe cellulaire.

On construit \mathcal{E} à partir de \mathcal{A} , par récurrence sur la dimension des cellules de \mathcal{A} .

Problème 1 : préparation

Faire en sorte que les nouvelles cellules de \mathcal{E} forment encore une préparation des θ_i .

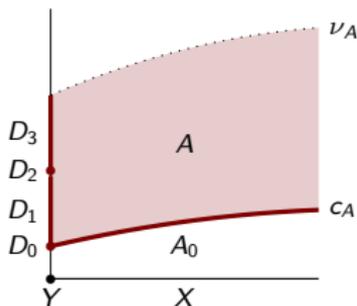
Solution

On sait faire !

But

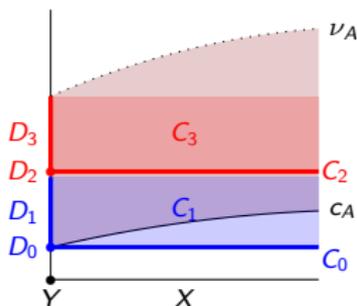
Partant d'une préparation \mathcal{A} des fonctions $(\theta_i \circ u_\eta)_{i \leq r}$ en cellules largement continues, construire une préparation plus fine \mathcal{E} dont les cellules forment un **complexe**, voire un monoplexe cellulaire.

Problème 2 : complexe cellulaire



$\mathcal{A} \setminus \{A\}$ forme un monoplexe cellulaire, mais pas \mathcal{A} : les cellules D_i sont incluses dans ∂A mais (sauf D_0) n'en sont pas des côtés.

Solution

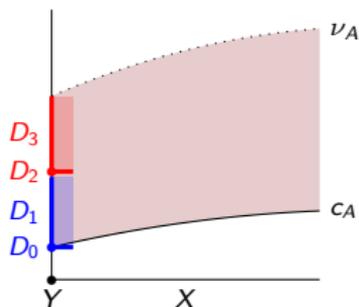


À l'aide d'une rétraction $\rho : Y \rightarrow X$, découper dans A des cellules C_i qui « élargissent » les D_i , et remplacer A par ces cellules.

$$(c_{C_i}, \mu_{C_i}, \nu_{C_i}) = (c_{D_i} \circ \rho, \mu_{D_i} \circ \rho, \nu_{D_i} \circ \rho)$$

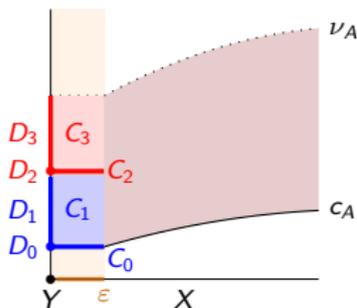
Sauf que... ces cellules ne recouvrent pas A (ni ne sont incluses dans A).

Solution



Mais si on restreint le socle des C_i à un voisinage assez petit de Y , ce problème disparaît.

Solution



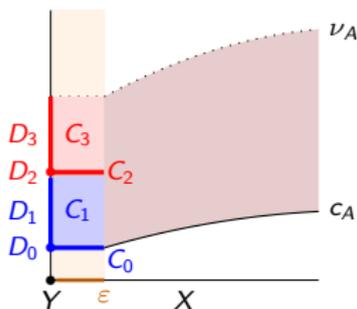
Si $f(y) \neq 0$ avec f une fonction continue, comme $v(f(y)) \in \mathbb{Z}$ on aura $v(f(x)) = v(f(y))$ dès que x est assez proche de y .

$\forall y \in Y, \exists \varepsilon(y) \in K^\times,$

$\forall (x, t) \in X \times K, \text{ si } \|x - y\| \leq |\varepsilon(y)| \text{ alors}$

- $|\nu_A(x)| = |\bar{\nu}_A(y)|;$
- si $t \neq \bar{c}_A(y)$ alors $|t - c_A(x)| = |t - \bar{c}_A(y)|$

Solution



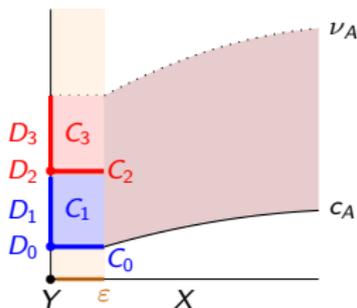
Si $f(y) \neq 0$ avec f une fonction continue, comme $v(f(y)) \in \mathbb{Z}$ on aura $v(f(x)) = v(f(y))$ dès que x est assez proche de y .

D'où une fonction $\varepsilon : Y \rightarrow K^\times$ telle que

$\forall y \in Y, \forall (x, t) \in X \times K$, si $\|x - y\| \leq |\varepsilon(y)|$ alors

- $|\nu_A(x)| = |\bar{\nu}_A(y)|$;
- si $t \neq \bar{c}_A(y)$ alors $|t - c_A(x)| = |t - \bar{c}_A(y)|$

Solution



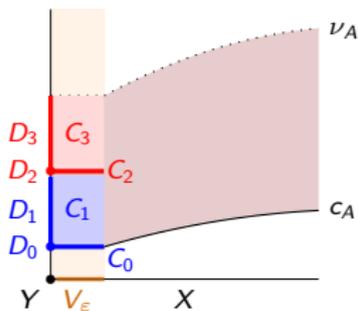
Si $f(y) \neq 0$ avec f une fonction continue, comme $v(f(y)) \in \mathbb{Z}$ on aura $v(f(x)) = v(f(y))$ dès que x est assez proche de y .

Avec $y = \rho(x)$ on a donc

$\forall (x, t) \in X \times K$, si $\|x - \rho(x)\| \leq |\varepsilon(\rho(x))|$ alors

- $|\nu_A(x)| = |\bar{\nu}_A(\rho(x))|$;
- si $t \neq \bar{c}_A(\rho(x))$ alors $|t - c_A(x)| = |t - \bar{c}_A(\rho(x))|$

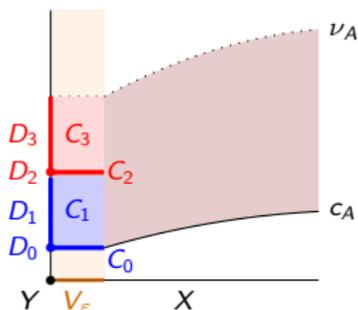
Solution



Sur $V_\epsilon \times K$, avec $V_\epsilon := \{x \in X / \|x - \rho(x)\| \leq |\epsilon(x)|\}$ on a donc

$$|0| < |t - c_A(x)| \leq |\nu_A(x)| \iff |0| < |t - \bar{c}_A(\rho(x))| \leq |\bar{\nu}_A(\rho(x))|.$$

Solution



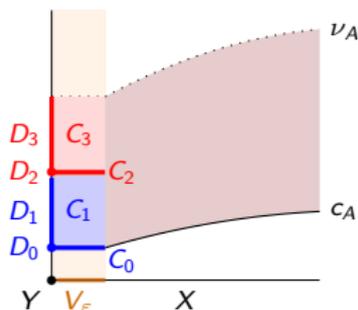
Sur $V_\epsilon \times K$, avec $V_\epsilon := \{x \in X / \|x - \rho(x)\| \leq |\epsilon(x)|\}$ on a donc

$$|0| < |t - c_A(x)| \leq |\nu_A(x)| \iff |0| < |t - \bar{c}_A(\rho(x))| \leq |\bar{\nu}_A(\rho(x))|.$$

Et donc :

$$(x, t) \in A \cap (V_\epsilon \times K) \iff (\rho(x), t) \in \bar{A} \cap (Y \times K)$$

Solution



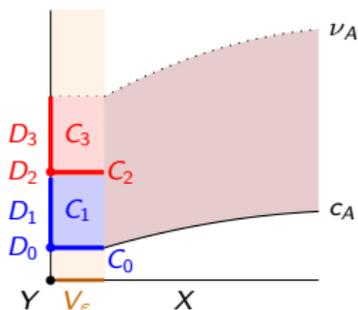
Sur $V_\varepsilon \times K$, avec $V_\varepsilon := \{x \in X / \|x - \rho(x)\| \leq |\varepsilon(x)|\}$ on a donc

$$|0| < |t - c_A(x)| \leq |\nu_A(x)| \iff |0| < |t - \bar{c}_A(\rho(x))| \leq |\bar{\nu}_A(\rho(x))|.$$

Et donc :

$$(x, t) \in A \cap (V_\varepsilon \times K) \iff (\rho(x), t) \in \bar{A} \cap (Y \times K) = \bigcup_i D_i$$

Solution



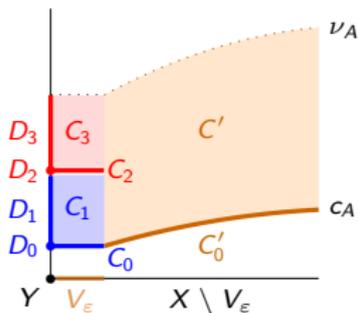
Sur $V_\epsilon \times K$, avec $V_\epsilon := \{x \in X / \|x - \rho(x)\| \leq |\epsilon(x)|\}$ on a donc

$$|0| < |t - c_A(x)| \leq |\nu_A(x)| \iff |0| < |t - \bar{c}_A(\rho(x))| \leq |\bar{\nu}_A(\rho(x))|.$$

Et donc :

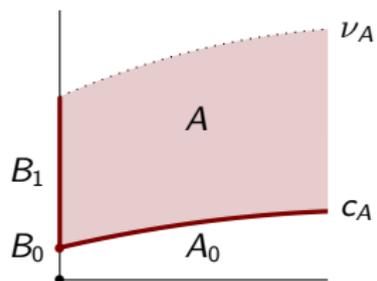
$$\begin{aligned} (x, t) \in A \cap (V_\epsilon \times K) &\iff (\rho(x), t) \in \bar{A} \cap (Y \times K) = \bigcup_i D_i \\ &\iff (x, t) \in \bigcup_i C_i \end{aligned}$$

Solution

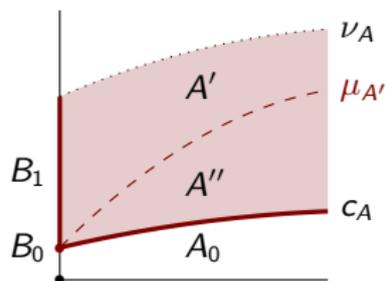


$\mathcal{E} := (\mathcal{A} \setminus \{A\}) \cup \{C', C'_0, C_0, C_1, C_2, C_3\}$ forme un complexe cellulaire... mais pas un monoplexe !

Problème 3 : *monopole cellulaire*



Solution



On coupe A en deux à l'aide d'une fonction intermédiaire : $|0| < |\mu_{A'}| < |\nu_A|$.

- 1 Ensembles semi-algébriques p -adiques
 - Corps p -adiquement clos
 - Ensembles semi-algébriques
 - Élimination des quantificateurs
- 2 Triangulation p -adique et applications
 - Simplexes discrets
 - Simplexes p -adiques et triangulation
 - Rétraction
 - Découpage
- 3 Ingrédients de la preuve
 - Décomposition cellulaire et déformation
 - Monoplexe cellulaire
 - Pour aller plus loin...

Pour tout ensemble semi-algébrique $A \subseteq K^m$, notons $L(A)$ le treillis des parties semi-algébriques fermées dans A .

Corollaire

La théorie complète de $L(A)$ est décidable, et élimine les quantificateurs dans une extension par définition du langage des treillis (notion de « treillis échelonné »).

Remarques

- On sait depuis Grzegorzcyk (1951) que si K est algébriquement clos ou réel-clos, la théorie de $L(K^m)$ est indécidable pour tout $m \geq 2$.
- La théorie de $L(K^m)$ ne dépend que de m , pas du corps p -adiquement clos considérés (elle ne dépend même pas de p !).
- A, B sont homéomorphes si et seulement si $L(A), L(B)$ sont isomorphes. Il existe une plus petite sous-structure de $L(A)$ et $L(B)$ (au sens des treillis échelonnés). Celle-ci est finie, et pourrait bien être un invariant décisif dans la classification à homéomorphisme près.

Projets

- Classification à homéomorphismes près (Théorème de Hardt. . .) ?
- Lien avec les stratifications de Cluckers, Comte, Loeser, et les t-stratifications de Halpuczok ?
- Triangulation pour d'autres structures (sous-analytiques p -adiques, autres corps valués. . .) ?